

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS

**“CURVAS FRACTALES GENERADAS A PARTIR DE
HOMOMORFISMOS ENTRE ALFABETOS”**

Presentada por:

Br. Andy Raúl Peña Vélchez

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Línea de Investigación:

Matemática Aplicada

**PIURA – PERÚ
2019**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS

**“CURVAS FRACTALES GENERADAS A PARTIR DE
HOMOMORFISMOS ENTRE ALFABETOS”**

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Br. Andy Raúl Peña Vilchez
Ejecutor

Dr. Julio Enrique López Castillo
Asesor

Línea de Investigación:

Matemática Aplicada

PIURA – PERÚ
2019

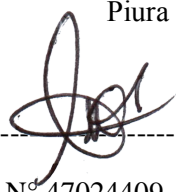
DECLARACIÓN JURADA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACION

Yo: **ANDY RAUL PEÑA VILCHEZ** identificado con DNI N° **47024409**, en la condición de Estudiante Egresado, de la Facultad de **CIENCIAS**, Escuela Profesional de **MATEMÁTICA** y domiciliado en **CACERIO CP-5** Distrito de Las Lomas, Provincia de Piura, Departamento de Piura, Celular: **926328860**, Email: **andyraul2014@hotmail.com**.

DECLARO BAJO JURAMENTO: que el trabajo de investigación que presento a la Oficina Central de Investigación (OCIN), es original, no siendo copia parcial ni total de un trabajo de investigación desarrollado, y/o realizado en el Perú o en el Extranjero, en caso de resultar falsa la información que proporciono, me sujeto a los alcances de lo establecido en el Art. N° 411, del código Penal concordante con el Art. 32° de la Ley N° 27444, y Ley del Procedimiento Administrativo General y las Normas Legales de Protección a los Derechos de Autor. En fe de lo cual firmo la presente.



Piura del 2019


DNI N° 47024409

Artículo 411.- El que, en un procedimiento administrativo, hace una falsa declaración en relación a hechos o circunstancias que le corresponde probar, violando la presunción de veracidad establecida por ley, será reprimido con pena privativa de libertad no menor de uno ni mayor de cuatro años.

Art. 4. Inciso 4.12 del Reglamento del Registro Nacional de Trabajos de Investigación para optar grados académicos y títulos profesionales –RENATI Resolución de Consejo Directivo N° 033-2016-SUNEDU/CD

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**“CURVAS FRACTALES GENERADAS A PARTIR DE
HOMOMORFISMOS ENTRE ALFABETOS”**

TESIS REVISADA Y APROBADA POR EL JURADO

Dra. Sonia Casos Fernández
Presidente

Mg. María Aredo Alvarado
Miembro

Msc. Graciela del Pilar Burgos Namuche
Miembro

PIURA – PERÚ
2019

ACTA DE SUSTENTACIÓN



UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA FACULTAD DE CIENCIAS



"AÑO DE LA LUCHA CONTRA LA CORRUPCIÓN Y LA IMPUNIDAD"

ACTA DE SUSTENTACIÓN 019-2019-UI-FC-UNP

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para evaluar la Tesis denominada **"CURVAS FRACTALES GENERADAS A PARTIR DE HOMOMORFISMOS ENTRE ALFABETOS"**, presentada por el señor Bachiller **ANDY RAÚL PEÑA VÍLCHEZ**, con el asesoramiento del **Dr. Julio Enrique López Castillo**; oídas las observaciones y respuestas a las preguntas formuladas, y de conformidad al Reglamento de Tesis para obtener el Título Profesional en la Facultad de Ciencias, lo declaran:

APROBADO (✓)

DESAPROBADO ()

Con la mención de:


EXCELENTE

(✓) En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo de Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**.

(✓) En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo Universitario de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**; después que el sustentante incorpore la sugerencia del Jurado Calificador.

Piura, 19 de marzo de 2019.


Dra. SONIA ALICIA CASÓS FERNÁNDEZ
PRESIDENTE DE JURADO DE TESIS


Mg. MARÍA ANGÉLICA AREDO ALVARADO
SECRETARIO DE JURADO DE TESIS




MSc. GRACIELA DEL PILAR BURGOS NAMUCHE
VOCAL DE JURADO DE TESIS

Campus Universitario - Urb. Miraflores S/N. Castilla
PIURA - PERU

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a Dios, mis padres, mis hermanos quienes fueron un gran apoyo emocional durante el tiempo en que elabore esta tesis.

A mis maestros quienes nunca desistieron al enseñarme, aun sin importar que muchas veces no ponía atención en clase, a ellos que continuaron depositando su esperanza en mí.

A mi sobrina Thalía, que siempre me regala una sonrisa.

A Gissela por siempre estar pendiente de mí, además de ser una excelente persona.

Para ellos es esta dedicatoria de tesis, pues es a ellos a quienes se las debo por su apoyo incondicional

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Julio López por ayudarme en esta tesis, gracias por la paciencia y por ser un buen docente e impartir nuevos conocimientos.

A mis padres Urbano y Mariana por apoyarme y darme siempre lo mejor, los quiero mucho.

A mis hermanos Jhan Carlos y Eswin, Lucia por estar siempre apoyándome y brindándome su apoyo incondicional.

A mí ingerida Thalía.

A Gissela que me brindó su apoyo incondicional y estuvo siempre pendiente de mí.

A todos mis amigos: Amelia, Luzmila, Percy, Sindi, Miguel, Diego, José, Ronald y tantos otros más, gracias por la amistad que me brindan y sé que siempre poder contar con ustedes.

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN.....	1
II. ASPECTOS DE LA PROBLEMÁTICA.....	3
1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA.	3
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.3 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN	3
1.4 OBJETIVOS.....	4
1.5 DELIMITACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	4
III. MARCO TEÓRICO	6
2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.	6
2.2 BASES TEÓRICAS.....	7
2.2.1 Conceptos de Álgebra.....	7
2.2.2 Sistemas – L	12
2.2.3 Conceptos de Geometría Diferencial.....	13
2.2.4 Representación de Bézier	17
2.2.4.1 Polinomios de Bernstein.....	17
2.2.4.2 Propiedades de los polinomios Bernstein	18
2.2.4.3 Curvas de Bézier	19
2.2.5 Conceptos de Fractales	21
2.2.6 Conjunto de Cantor	26
2.2.7 La curva de Koch.....	26
2.2.8 CADENA INFINITA DE FIBONACCI.....	28
2.2.8.1 La Cadena de Fibonacci.....	28
2.3 GLOSARIO DE TÉRMINOS BÁSICOS	47
2.4 HIPÓTESIS.....	47
2.4.1 Hipótesis General.....	47
IV. MARCO METODOLÓGICO	48
3.1 ENFOQUE Y DISEÑO.....	48
3.2 TIPO.....	48
3.3 MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS.....	48
3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS.....	48
V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	49
4.1 RESULTADOS.....	49
4.1.1 Cadena de Thue-Morse	49
4.1.1.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA CADENA DE THUE-MORSE	50
4.1.1.2 INTERPRETACIÓN FRACTAL DE LA CADENA DE THUE-MORSE	50
4.1.2 CADENA DE STURM	51
4.1.3 ALGUNAS CADENAS CARACTERÍSTICAS Y CURVAS FRACTALES	51
4.2 DISCUSIÓN	59
CONCLUSIONES	60
RECOMENDACIONES	61
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	62
ANEXOS.....	63

ÍNDICE DE CUADROS

<i>Cuadro 2. 1. Código para generar la cadena de Fibonacci</i>	<i>30</i>
<i>Cuadro 2. 2. Regla de dibujo Fibo.</i>	<i>35</i>
<i>Cuadro 2. 3. Regla de dibujo para la cadena de Fibonacci.....</i>	<i>39</i>
<i>Cuadro 2. 4. Nueva regla de dibujo</i>	<i>40</i>
<i>Cuadro 2. 5. Código para el cambio de ángulo la cadena de Fibonacci</i>	<i>44</i>
<i>Cuadro 2. 6. Código para generar la cadena densa de Fibonacci.....</i>	<i>45</i>
<i>Cuadro 2. 7. Lenguaje para la implementación en el software científico Mathematica.</i>	<i>46</i>
<i>Cuadro 4. 1. Relación de entre la cadena de Fibonacci y la cadena de Sturm.....</i>	<i>51</i>
<i>Cuadro 4. 2. Código para generar las cadenas de Sturm y sus respectivas curvas fractales.....</i>	<i>52</i>

INDICE DE FIGURAS

Figura 2. 1. Representación gráfica de la función , $f(x) = x^2$	14
Figura 2. 2. Representación gráfica de la función , $f(x) = \sin(x)$	14
Figura 2. 3. Una recta con dominio en $[-5,5]$	15
Figura 2. 4. Grafica de $\alpha(t) = \{t \cos[t], t \sin[t]\}, t \in \mathbb{R}$	15
Figura 2. 5. Grafica de la circunferencia $\alpha(t) = \{\cos[t], \sin[t]\}, t \in \mathbb{R}$	16
Figura 2. 6. Grafica de la Elipse $\alpha(t) = \{\cos[t], 2\sin[t]\}, t \in \mathbb{R}$	16
Figura 2. 7. Grafica de la función $\alpha(t) = \{t, t^3 - t^2 + 2t\}, t \in \mathbb{R}$	17
Figura 2. 8. Polinomios de Bernstein de grado 2	18
Figura 2. 9. Polinomios de Bernstein de grado 6	18
Figura 2. 10. Curva de Bézier de dados los puntos $P_0 = (0,0)$; $P_1 = (1,0)$ y $P_2 = (1,1)$	21
Figura 2. 11.. Naturaleza fractal.....	22
Figura 2. 12.. Naturaleza fractal.....	22
Figura 2. 13.. Imagen Fractal.....	23
Figura 2. 14. Dimensión de la recta.....	24
Figura 2. 15. Dimensión de un cuadrado.....	25
Figura 2. 16.. Dimensión de un cubo.....	25
Figura 2. 17. Dimensión del conjunto de cantor.	26
Figura 2. 18. Dimensión de la curva de Koch.....	27
Figura 2. 19.. Curva cerrada de Koch.....	27
Figura 2. 20. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 16$	40
Figura 2. 21. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 17$	41
Figura 2. 22. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 18$	41
Figura 2. 23. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 19$	42
Figura 2. 24. Clasificación de \mathbb{F}_n	43
Figura 2. 25. Curva de Koch.....	44
Figura 2. 26. Curva fractal $n = 20$, $\delta = 120^\circ$ y $\alpha = 60^\circ$	44
Figura 2. 27. Curva fractal para $n = 17$, $\delta = 120^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$	45
Figura 2. 28. Curva densa de Fibonacci.....	46
 Figura 4. 1. Cadena $\mu^4(0) = 0110100110010110$	 50
Figura 4. 2. Vincha Sigza, se obtiene cuando $\alpha = \sqrt{2} - 0.66$	53
Figura 4. 3. Un colex de cabello.....	53
Figura 4. 4. Un Ventilador en movimiento, se obtiene cuando $\alpha = 0.56$	54

Figura 4. 5. Cuadro porta fotos, se obtiene cuando $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \pi + 2$	54
Figura 4. 6. Cuna de niño, se obtiene cuando $\alpha = 0.84$	54
Figura 4. 7. Estrella de Mar, se obtiene cuando $\alpha = 0.974$	55
Figura 4. 8. El sol, se obtiene cuando $\alpha = \sqrt{2} - 0.66$	55
Figura 4. 9. Tapete, se obtiene cuando $\alpha = 0.76$	55
Figura 4. 10. Adorno para el cabello, se obtiene cuando $\alpha = 0.32$	56
Figura 4. 11. Mariposa de Ventilador, se obtiene cuando $\alpha = 0.56$	56
Figura 4. 12. Flor de Alhely, se obtiene cuando $\alpha = 0.76$	57
Figura 4. 13. . Planta de ají, se obtiene cuando $\alpha = \sqrt{2} - 1$	57
Figura 4. 14. Mascara, se obtiene cuando $\alpha = 0.995$	57
Figura 4. 15. Flor de Maracuyá, se obtiene cuando, $\alpha = 0.74$	58
Figura 4. 16. Un Moñete para pelo, se obtiene cuando $\alpha = 0.31$	58
Figura 4. 17. Flor de Girasol, se obtiene cuando $\alpha = 0.65$	58
Figura 4. 18. Un Collar de mujer, se obtiene cuando $\alpha = \frac{4-1.8462}{2}$	59

ÍNDICE DE ANEXOS

<i>Anexo 1. Programación usando el comando Polygon</i>	<i>63</i>
<i>Anexo 2. Programación usando el comando BezierCurve</i>	<i>63</i>
<i>Anexo 3. Programación para generar la cadena de Fibonacci.</i>	<i>64</i>
<i>Anexo 4. Mini – programa para generar las 5 curvas características de Fibonacci.</i>	<i>64-65</i>
<i>Anexo 5. Matriz de consistencia.</i>	<i>646</i>

RESUMEN

Es importante destacar que el objetivo principal de este trabajo es la generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre alfabetos, Para ello se definen la cadena de infinita de Fibonacci y se realiza una implementación con el software científico *Mathematica 9* de algunas propiedades de la cadena de Fibonacci, la cual se puede generar a partir de la iteración de un homomorfismo entre alfabetos, a partir del cual podemos redefinir otras cadenas como las de Sturm y Thue Morse. Luego definimos una regla de dibujo llamada Fibo, para poder mostrar las propiedades graficas asociadas a estas cadenas de símbolos. Los algoritmos utilizados en este trabajo se presentan en detalle. Concluimos con una forma alterneativa de generar la curva fractal de Fibonacci y otras curvas a partir de cadenas características las cuales nos permiten encontrar curvas Fractales con gran similitud a flores propias de nuestra provincia de Piura, esto de logra a partir de la recolección de información escrita de libros, revistas de investigación, tesis desarrolladas, con el fin de llegar a lo previsto.

Palabras clave: Cadena de Fibonacci, homomorfismo entre alfabetos, curvas fractales, L-sistemas, *Mathematica 9*.

ABSTRACT

It is important to note that the object main of this work is the generation of curves fractals from homomorfismos between alphabets, in order To define the chain of infinite Fibonacci and implementation with the software Mathematica 9 some properties of the string of Fibonacci, which can be generated from the iteration of a homomorfismo between alphabets, from which we can redefine other string as Sturm and Thue Morse. Then we define a rule of drawing called Fibo, to be able to show the properties of graphs associated to these strings of symbols. The algorithms used in this work are presented in detail. We conclude with an alternative way to generate the curve, fractal, Fibonacci, and other curves from strings features which allow us to find curves Fractals with high similarity to flowers characteristic of our province of Piura, this achieved from the collection of written information from books, magazines, research, thesis developed, with the aim of reaching as anticipated.

Key words: Chain of Fibonacci, homomorfismo between alphabets, curves, fractals, L-systems, Mathematica 9.

INTRODUCCIÓN

Desde hace más de cien años, los matemáticos que habían investigado en el campo de los fractales los consideraban monstruos de una irregularidad insospechable. Pero no es hasta 1977-1982 que el profesor Benoit Mandelbrot explicó que precisamente esta irregularidad insospechable es lo que conforma a la naturaleza, y que por lo tanto es nuestra esencia misma: lo que nos constituye. La geometría fractal se dedica al estudio de las figuras con infinito detalle que describen algunos fenómenos naturales. Es la ciencia inherente de lo impredecible.

Los fractales desde su primera formulación se utilizaron como modelos para explicar la naturaleza. El propio Benoit Mandelbrot tuvo el mérito de intuir la potencia de los fractales para construir modelos que expliquen la realidad, es por ello que con el pasar de los años aparecen nuevas teorías relacionadas con el estudio de los fractales.

La introducción del computador, con su inmensa capacidad de iteración rápida e interactiva, con la ayuda de algoritmos y procedimientos relativamente sencillos, es el instrumento ideal para el trabajo con este tipo de objetos matemáticos. Por su capacidad de interacción con el usuario, el computador permite un ajuste rápido entre las instrucciones establecidas en términos de procedimientos espaciales y la formulación definitiva de estos procedimientos como algoritmos, mediante contrastes sucesivos con variaciones en los programas y en las ejecuciones.

En el capítulo I, se describe la problemática de la investigación, comenzando con una pregunta de abstracción, justificando y dando la importancia de esta. Se dan los objetivos generales y específicos, que es de suma importancia, pues es un orientador hacia donde se dirige la investigación.

En el Capítulo II, definimos los conceptos básicos, para poder estudiar más a fondo todo lo referente a las cadenas de Fibonacci y otras cadenas. Los conceptos tratados son de Álgebra, Sistemas-L, Geometría Diferencial, Polinomios de Bézier; así como a los conceptos de Fractales. También definimos la cadena de Fibonacci y establecemos su relación con los números de Fibonacci; además, definimos un homomorfismo entre alfabetos que permite en cada iteración encontrar la cadena n -ésima de Fibonacci. También mostramos en detalle algunas propiedades de la cadena de Fibonacci. Por último desarrollamos un código utilizando el software científico *Mathematica 9* para la implementación gráfica de esta curva y de algunas de sus propiedades.

En el Capítulo III, se propone el marco metodológico que tiene como bases: el enfoque y diseño de la investigación, incluso este trabajo de investigación tiene una línea centrado en las

ciencias formales lo cual se caracteriza por valerse de la lógica matemática. Del mismo modo se describe los métodos, procedimientos, técnicas e instrumentos de la investigación, pues nos brinda un mecanismo para el estudio del presente trabajo.

En el Capítulo IV, se analiza los resultados y discusión que conlleva este trabajo. Para ello definimos la cadena de infinita de Thue-Morse, mostramos que la curva de Koch se puede obtener a partir de la cadena de Thue-Morse. Así mismo se define la cadena de Sturm y las cadenas características asociadas a esta cadena, y por ultimo generamos algunas curvas fractales utilizando comandos del software científico *Mathematica 9* tales como: BezierCurve, Polygon y Line.

CAPITULO I: ASPECTOS DE LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo se presenta la descripción de la realidad problemática, formulación del problema de investigación, justificación, problema y los objetivos planteados en la investigación.

1.1 DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA.

Puede parecer que los fractales son bellas formas matemáticas sin ninguna utilidad. Sin embargo son herramientas de gran potencia que permiten afrontar el estudio de fenómenos muy complejos que se presentan en la vida diaria, tales como en: física, ingeniería, matemática, estadística, biología, economía, etc. Si se observa la naturaleza, se puede encontrar formas geométricas ordenadas y bonitas, mientras que en el mundo de los fractales predomina el caos y las figuras monstruosas, llevando así al conocimiento de la complejidad, el desorden y movimiento que existen en la naturaleza y la sociedad.

El software científico *Mathematica 9*, es un Software con un lenguaje de programación muy sencillo y con el que la gran mayoría de estudiantes de la Escuela de Matemática está familiarizado. Pero la gran mayoría de estudiantes desconoce lo que es un fractal y cómo es que pueden ser representarlos mediante un algoritmo recursivo, a partir de esto surge una pregunta de abstracción, planteada de la siguiente manera: ¿Es posible aplicar los homomorfismos entre alfabetos para la generación de curvas Fractales?

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

A continuación se define el problema que dio origen a esta investigación

1.2.1 Problema general

¿Es posible aplicar los homomorfismos entre alfabetos para la generación de curvas Fractales?

1.3 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN.

En las próximas décadas los fractales sin duda revelaran más acerca del caos oculto dentro de la regularidad y acerca de los modos en que la estabilidad y el orden pueden nacer de la turbulencia y el azar subyacentes. Los fractales constituyen un tema matemático muy importante, gracias a las figuras que se crean por computadora siguiendo ciertas reglas y bases matemáticas. Estas figuras se obtienen de repetir una y otra vez el mismo procedimiento. Un fractal es algo irregular, pero lo más importante es que si lo ampliamos arbitrariamente, seguiría siendo irregular ya que es una figura que mantiene su forma original aunque se le cambie de escala, es decir, por más veces que se le modifique la dimensión seguiremos obteniendo una figura similar a la anterior. Las figuras fractales son útiles

en áreas como la botánica, biología, la medicina, la física, matemáticas, economía, computación, lingüística y, actualmente, en el arte. Gracias a los fractales se ha podido analizar fenómenos, tales como: turbulencias, bolsa de valores, dispersión del humo, etc. Además de sintetizar imágenes como: montañas, ramas de los árboles, nubes, costas rocosas, ríos, planetas, etc.

La generación de curvas fractales a menudo conlleva a utilizar diferentes métodos, uno de ellos es el de Sistema de Funciones Iteradas, es en la década de los setentas, cuando los fractales surgen de la curiosidad de los matemáticos, quienes mediante el desarrollo de intuiciones, fórmulas y abstracciones crearon una manera distinta de ver la realidad. Generalmente, al observar alrededor, encontramos formas geométricas ordenadas y bonitas, mientras que en el mundo de los fractales predomina el caos y las figuras irregulares llevándonos al conocimiento de la complejidad, el desorden y movimiento que existen en la naturaleza y la sociedad. Sin embargo, gracias a la belleza de los fractales se puede observar la belleza del caos. El caos y los fractales están relacionados, tanto, que podemos decir que los fractales constituyen el lenguaje del caos, y por tanto en un fractal hay orden y caos en perfecta armonía.

Esta investigación permitirá conocer más acerca de cómo se puede generar curvas fractales y de cómo aplicar la teoría de los homomorfismos para generar curvas fractales.

Para responder a la siguiente pregunta de investigación se proponen los siguientes objetivos.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo general

Demostrar que los homomorfismos entre alfabetos pueden ser usados para la generación de curvas fractales.

1.4.2 Objetivos específicos

- Utilizar la cadena de Fibonacci para la generación de curvas fractales.
- Relacionar las propiedades de las cadenas de Fibonacci con las cadenas de Sturm y la cadena infinita de Thue-Morse.
- Utilizar el software científico Mathematica 9 para generar las cadenas de Fibonacci y visualizar las gráficas asociadas a dicha cadena.

1.5 DELIMITACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.

Es importante notar que en esta investigación se señala las bases teóricas que fueron necesarias para movilizar o construir las curvas fractales, las cuales serán representadas en el plano cartesiano.

Se estudia más a detalle cadenas finitas definidas en un alfabeto binario. Por lo que a partir de estas se pueden generar curvas fractales.

El software utilizado para la implementación de los mini-programas es el Mathematica 9

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

En esta sección se presenta los antecedentes de la investigación, bases teóricas, glosario de términos básicos y la hipótesis.

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.

Los fractales deben su origen al francés Henri Poincaré (1854-1912). Sus ideas fueron tomadas, más tarde por dos matemáticos, también franceses: Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Los fractales, desde su primera formulación tuvieron una vocación práctica de servir como modelos para explicar la naturaleza.

En el año 1958, Benoit Mandelbrot comienza una investigación en los laboratorios de IBM acerca del análisis del ruido y las perturbaciones eléctricas. Durante sus estudios encuentra un patrón de comportamiento y comienza a descifrar una estructura escondida que se repite a diversas escalas. En su tan citada obra *The Fractal Geometry of Nature*, Mandelbrot razonó que la naturaleza entiende mucho más de geometría fractal que de geometría diferenciable. A partir de ahí, muchos científicos han encontrado fractales en sus campos de estudio (el título de uno de los libros sobre el tema es bastante sugerente, *Fractals Everywhere*).

En los últimos años se tiene la noción de lo que es una curva fractal, sabemos distinguirlos de otras curvas que no son fractales. Estas curvas son estudiadas por la geometría fractal, la cual es adecuada para describir procesos no lineales en la naturaleza.

El problema consiste en generar curvas fractales mediante homomorfismos entre alfabetos utilizando cadenas tales como: La cadena de Fibonacci, La cadena infinita de Thue-Morse y La cadena de Sturm.

A continuación se presentan los trabajos realizados por diversos investigadores cuyo objeto matemático de estudio es curvas fractales. Estas investigaciones nos permitirán tener un panorama de los estudios realizados en relación a las curvas fractales.

En la investigación de Correa y Vidarte (2002), realizan una introducción al fascinante mundo de la geometría Fractal y, también tratan el aspecto analítico - complementado con un paquete en el software científico *Mathematica 9*. Se construyen superficies fractales y se aplican en el diseño de objetos irregulares, pero no hay mención del método que se pretende abordar en este trabajo.

Por otro lado en la investigación de Correa y Raymundo (2014) construyen transformaciones que modelan imágenes naturales tales como plantas, para ello se observa meticulosamente el patrón que describe sus ramificaciones, luego se ubican en un sistema de coordenadas con la finalidad de obtener un sistema de funciones iteradas que las generan. Se codifica un algoritmo utilizando

diferentes sistemas de funciones iteradas en el lenguaje de programación del software científico *Mathematica 9*. Al igual que en este trabajo se construyen algoritmos que permiten el modelamiento de imágenes naturales fractales.

Así mismo Rodríguez (1995) describe en forma completa ciertas irregularidades y patrones fragmentados de las formas que aparecen en la naturaleza tales como líneas costeras, nubes, montañas, etc., en 1977 B.B. Mandelbrot. El objetivo de la tesis es la aplicación de la metodología fractal a un área específica de la ingeniería para el estudio de los materiales (aceros inoxidable), También mostrar y describir los fundamentos de la teoría de los fractales.

En la investigación realizada por Ramírez y Rubiano (2012) hace una implementación con el software Mathematica 8.0 de algunas propiedades combinatorias de la palabra de Fibonacci, la cual se puede generar a partir de la iteración de un homomorfismo entre lenguajes. Asimismo se recopilan algunas propiedades gráficas de la curva fractal de Fibonacci, la cual se puede generar a partir de unas reglas de dibujo. Finaliza con una forma alternativa de generar la curva de Fibonacci. Es por ello que se gran importancia en el desarrollo de esta tesis. Porqué brindara el sustento teórico que es necesario en el desarrollo de la misma.

Las investigaciones revisadas brindan aportes para establecer el foco de la investigación que se pretende abordar, en base a ello, se presenta las bases teóricas basada en los antecedentes explicados.

2.2 BASES TEÓRICAS.

En esta sección se presentan los conceptos más importantes que serán utilizados en el desarrollo del presente trabajo, recordaremos algunas definiciones básicas del Álgebra, Sistemas-L, Geometría diferencial, Curvas de Bézier así como de algunos Fractales. También se hará uso del Software científico *Mathematica 9*, para mostrar cómo se genera la cadena de Fibonacci, la cual permitirá la construcción de las diferentes gráficas fractales.

2.2.1 Conceptos de Álgebra

A continuación definimos ciertas herramientas matemáticas que se van a utilizar en la construcción de curvas Fractales.

Observación 1: Las definiciones que se presentan a continuación fueron extraídas de Ramírez y Rubiano (2012).

Definición 2.1. Un alfabeto es un conjunto finito Σ donde sus elementos se llamarán símbolos o letras.

Para notar los alfabetos en general usaremos siempre que sea posible las primeras letras griegas: Σ y Δ . Para los símbolos trataremos de emplear las primeras letras en minúsculas: a, b, c, \dots o números.

Ejemplo 2.1.

- El alfabeto español lo denotaremos por

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

- $\Sigma = \{0, 1\}$ es un alfabeto con símbolos 0 y 1.
- $\Sigma = \{a, b\}$ es un alfabeto con símbolos a y b .

Definición 2.2. Las cadenas o palabras son una sucesión finita de símbolos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tomadas de un conjunto finito no vacío Σ llamado alfabeto.

Observación 2.: Para facilitar la escritura, la cadena se escribe simplemente como $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ y se denotan por las letras u, v, w, x, \dots . Se supone la existencia de una única cadena λ que no tiene símbolos llamada cadena vacía.

Observación 3.: Podemos decir que la cadena vacía desempeña un papel similar al conjunto vacío \emptyset en la teoría de los conjuntos.

Definición 2.3. Definimos Σ^* como el conjunto de todas las cadenas sobre un alfabeto Σ , incluyendo la cadena vacía.

Definición 2.4. La longitud $|u|$ de una cadena $u \in \Sigma^*$ se define como el número de símbolos de u , incluyendo los símbolos repetidos.

Ejemplo 2.2.: La longitud de la cadena $u = 0011001100$ es $|u| = 10$.

Se puede observar que la cadena u esta definida sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$

Ejemplo 2.3. La longitud de la cadena $w = aabbaabbaabb$ es $|w| = 12$.

Se puede observar que la cadena w esta definida sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$

Definición 2.5. Por $|u|_a$ representamos la cantidad de veces que aparece el símbolo a en la cadena u .

Ejemplo 2.4. En el ejemplo anterior $u = 0011001100$, se tiene que $|u|_0 = 6$ y $|u|_1 = 4$

Es decir el símbolo 0 aparece 6 veces en la cadena u y el símbolo 1 aparece 4 veces en la cadena u . De tal manera que $|u|_0 + |u|_1 = 6 + 4 = 10$

Ejemplo 2.5. En el ejemplo anterior $w = aabbaabbaabb$, se tiene que $|w|_a = 6$ y $|w|_b = 6$.

Es decir el símbolo a aparece 6 veces en la cadena w y el símbolo b aparece 6 veces en la cadena w . De tal manera que $|w|_a + |w|_b = 6 + 6 = 12$

Definición 2.6. Dadas dos cadenas $u = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ y $v = b_1, b_2, b_3, \dots, b_s$ en Σ^* , la concatenación uv es la cadena que resulta de escribir los símbolos de u y a continuación los símbolos de v , es decir $uv = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k b_1, b_2, b_3, \dots, b_s$.

Ejemplo 2.6. Sea la cadena $u = 0101010101$ y $v = 1100110011$ definidas en $\Sigma = \{0,1\}$, al hacer la concatenación se obtiene: $uv = 01010101011100110011$

Las cadenas mostradas en esta investigación, tienen algunas características que son muy fáciles de identificar. Es por ello que para poder mostrar todas las características que poseen, hemos decidido escoger las más fáciles de definir, considerando alfabetos con solo dos elementos y el más utilizado es $\Sigma = \{0,1\}$.

Algunas propiedades básicas de las cadenas, definidas en un alfabeto Σ son:

- $|uv| = |u| + |v| = |u|$ y $|u^n| = n|u|$ para todo entero $n \geq 0$, donde $u^n = u \dots u$ (n veces) es llamada la n -potencia de u .
- Asociativa $u(vw) = (uv)w$, $\forall u, v, w \in \Sigma^*$.
- Elemento Neutro $u\lambda = \lambda u = u$, $\forall u \in \Sigma^*$.
- Una cadena v es una subcadena o factor de u si existen cadenas $x, y \in \Sigma^*$, tales que $u = xvy$. Es claro que x ó y pueden ser λ , así la cadena vacía es subcadena de cualquier cadena y toda cadena es subcadena de sí misma.

Observación 4.: Las propiedades asociativas y elemento neutro dotan al conjunto de las cadenas con la operación de concatenación de la estructura de monoide.

Definición 2.7. Si $u = vw$, entonces las subcadenas v y w se llaman prefijo y sufijo de u , respectivamente.

En este caso podemos asegurar que la cadena λ no tiene ningún elemento, y que podemos definirla sobre cualquier alfabeto.

Observación 5.: La propiedad conmutativa $vw = wv$ no se verifica.

Definición 2.8. La inversa u^{-1} de una cadena $u \in \Sigma^*$, se define como:

$$u^{-1} = \begin{cases} a_n a_{n-1} \dots a_1, & \text{si } u = a_1 \dots a_{n-1} a_n \\ \lambda, & \text{si } u = \lambda \end{cases}$$

Observación 6.: Algunos autores escriben u^R en lugar de u^{-1} para denotar la inversa de la cadena u .

Teorema 2.1. Dadas las cadenas $u = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ y $v = b_1, b_2, b_3, \dots, b_s$ en Σ^* , entonces $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$

Demostración

$$\begin{aligned}(uv)^{-1} &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k b_1, b_2, b_3, \dots, b_s)^{-1} \\ &= \underbrace{b_s b_{s-1} \dots b_1}_{v^{-1}} \underbrace{a_k a_{k-1} \dots a_1}_{u^{-1}} \\ &= v^{-1} u^{-1}\end{aligned}$$

Se concluye que $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$

■

Ejemplo 2.7. Dada la cadena $u = 01010101$, la inversa de la cadena u , es: $u^{-1} = 10101010$

Definición 2.9. Una cadena es un palíndromo si $u^{-1} = u$. Es decir la inversa de la cadena u es igual a la cadena u .

Ejemplos 2.8.

- Sea la cadena $u = 0011001100$, la inversa de la cadena u , es:

$$u^{-1} = 0011001100,$$

entonces podemos decir que, $u = u^{-1}$, por ello decimos que la cadena u es un palíndromo.

- Sea la cadena $w = aba$, la inversa de la cadena w , es:

$$w^{-1} = aba$$

entonces podemos decir que, $w = w^{-1}$, por ello decimos que la cadena w es un palíndromo.

- Sea la cadena $v = 1100110011$, la inversa de la cadena v , es :

$$v^{-1} = 1100110011$$

entonces podemos decir que, $v = v^{-1}$, por ello decimos que la cadena v es un palíndromo.

- Sea la cadena $x = abab$, la inversa de la cadena x , es :

$$x^{-1} = baba$$

entonces podemos decir que, $x \neq x^{-1}$, por ello decimos que la cadena x no es un palíndromo.

Definición 2.10. Una cadena infinita $\mathbf{u} = a_1, a_2, a_3, \dots$ es una sucesión infinita de símbolos, y se denota con letra minúscula en negrilla. El conjunto de todas las cadenas infinitas sobre Σ se denota como Σ^ω ; además $\Sigma^\infty = \Sigma^\omega \cup \Sigma^*$.

Observación 7.: Σ^∞ es el conjunto de cadenas finitas e infinitas definidas sobre el alfabeto Σ .

Ejemplo 2.9. Sea $\mathbf{p} = (p_n)_{n \geq 1} = 0110101000101 \dots$ es una cadena infinita, donde $p_n = 1$ si n es un número primo y $p_n = 0$ en caso contrario. Haciendo uso del Software científico *Mathematica* 9, para $n = 100$, encontramos los 100 primeros números de la cadena infinita \mathbf{p} :

$$\mathbf{Cadena1[n]} := \text{Table}[\text{If}[\text{PrimeQ}[j], 1, 0], \{j, 1, n\}]$$
$$p[100]=\{0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,$$

$$0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0\}$$

Ejemplo 2.10. Sea $\mathbf{q} = (q_n)_{n \geq 1} = 010101010101 \dots$, es una cadena infinita, donde $p_n = 1$ si n es un número par y $p_n = 0$ en caso contrario. Haciendo uso del Software científico *Mathematica*, para $n = 100$, encontramos los 100 primeros números de la cadena infinita \mathbf{q}

$$\mathbf{cadena2[n]} := \text{Table}[\text{If}[\text{Mod}[j, 2] = 0, 1, 0], \{j, 1, n\}]$$
[illegible]

Con el mini-programa `cadena1` y `cadena2`, hecho en el *Mathematica 9*, se puede generar las cadenas \mathbf{p} y \mathbf{q} , siendo estas, cadenas infinitas, donde solo se ha encontrado los 100 primeros términos en ambos ejemplos.

Definición 2.11. Sean Σ y Δ dos alfabetos. Un homomorfismo es una función $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$, tal que $h(xy) = h(x)h(y) \forall x, y \in \Sigma^*$. Es claro que $h(\lambda) = \lambda$, y que h queda completamente determinado si se conoce $h(a)$, para todo $a \in \Sigma$.

Ejemplo 2.11. Sean $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Delta = \{0, 1\}$ y $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ el homomorfismo definido por $h(a) = 0$, $h(b) = 1$ y $h(c) = 010$. El homomorfismo h convierte cadenas de Σ^* en cadenas de Δ^*

siguiendo las siguientes reglas: cada (a) se reemplaza por 0, cada (b) por 1 y cada (c) se reemplaza por la cadena 010. Así,

$$✓ \quad h(a^2b^2) = h(aabb) = h(a)h(a)h(b)h(b) = 0011$$

$$✓ \quad h(acb^2c) = h(a)h(c)h(b)h(b)h(c) = h(a)h(a)h(b)h(b) = 001011010$$

Ejemplo 2.12. Sean $\Sigma = \{0,1\}$, $\Delta = \{a,b\}$, y $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ el homomorfismo definido por $h(0) = a$, $h(1) = ba$. El homomorfismo h convierte cadenas de Σ^* en cadenas de Δ^* siguiendo las siguientes reglas: cada $h(0)$ se reemplaza por a , cada $h(1)$ por ba .

Así, analizando se tiene.

$$✓ \quad h(0^21^2) = h(0011) = h(0)h(0)h(1)h(1) = aababa$$

$$✓ \quad h(010) = h(010) = h(0)h(1)h(0) = abaa$$

2.2.2 Sistemas – L

Los Sistemas – L fueron introducidos y desarrollados en 1968 por el biólogo y botánico teórico húngaro Aristid Lindenmayer de la Universidad de Utrecht (1925-1989).

Definición 2.12. Un sistema-L es una gramática formal (un conjunto de reglas y símbolos) principalmente utilizados para modelar el proceso de crecimiento de las plantas; puede modelar también la morfología de una variedad de organismos. Los sistemas-L también pueden utilizarse para generar fractales auto-similares. (Sistemas-L, s.f)

Los sistema-L son también conocidos con el nombre de sistemas L paramétricos, definidos como un conjunto

$$G = (\Sigma, S, \omega, P)$$

Donde:

- ✓ Σ (el alfabeto) es un conjunto de símbolos que contiene elementos que pueden ser reemplazados (variables).
- ✓ S es un conjunto de símbolos que contiene elementos que se mantiene fijos (constantes).
- ✓ ω es una cadena de símbolos de Σ que definen el estado inicial del sistema (inicio o axioma).
- ✓ P es un conjunto de reglas o producciones que definen la forma en la que las variables pueden ser reemplazadas por combinaciones de constantes y otras variables.

Las reglas gramaticales de los sistemas-L se aplican iterativamente a partir de un estado inicial.

Ejemplo 2.13. Los Números de Fibonacci. Se define con la siguiente gramática sencilla:

- variables: A,B
- constantes: ninguna
- inicio: A
- reglas: $(A \rightarrow B), : (B \rightarrow AB)$

el cual produce la siguiente secuencia de cadenas (Sistemas-L, s.f):

$n=0 : A$

$n=1 : B$

$n=2 : AB$

$n=3 : BAB$

$n=4 : ABBAB$

$n=5 : BABABBAB$

$n=6 : ABBABBABABBAB$

$n=7 : BABABBABABBABABBAB$

Cuando se mide la longitud de cada cadena, se obtiene la famosa secuencia de los números de Fibonacci:

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...

Es así que podemos generar diferentes cadenas, utilizando los Sistemas – L.

2.2.3 Conceptos de Geometría Diferencial

Presentamos a continuación algunas nociones relacionadas con el concepto de geometría diferencial, tales como: definición de función, Recta, Elipse, Espiral y Circunferencia.

Definición 2.13. Una función $f: X \rightarrow Y$ con dominio $\text{Dom } f \subset X$ es una correspondencia que asocia a cada $p \in \text{Dom } f$ un único elemento $f(p) \in Y$. El conjunto $\{f(p) / p \in \text{Dom } f\}$ lo llamaremos conjunto imagen, $\text{Im } f$ también se denomina rango de la función o codominio de la función, $\text{Codom } f$. Diremos que X es el conjunto inicial y que Y es el conjunto final de f . (Pogorélov, 1997, p.13).

Podemos decir que una función f queda bien definida, si tiene 3 partes: dos conjuntos X e Y no vacíos y una regla de correspondencia que relaciona dichos conjuntos. La variable que represente los valores del dominio será la variable independiente y la variable dependiente será la variable que represente los valores del rango o codominio. Está claro que la variable dependiente depende de los valores que tome la variable independiente.

A continuación se muestran algunos ejemplos de funciones definidas en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 2.14. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow +\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, su representación gráfica es una parábola

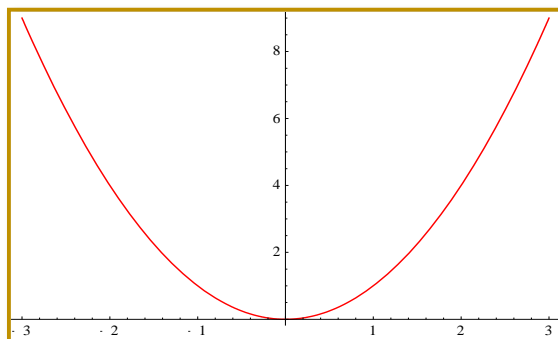


Figura 2. 1. Representación gráfica de la función $f(x) = x^2$

Ejemplo 2.15. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, $f(x) = \sin(x)$, su representación gráfica es

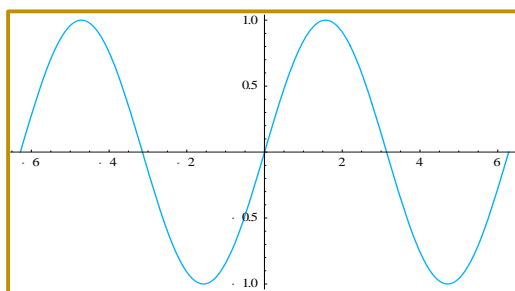


Figura 2. 2. Representación gráfica de la función , $f(x) = \sin(x)$

Sea $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ funciones reales, continuas definidas en el intervalo $[a,b]$, entonces el vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$ define una curva paramétrica para el parámetro $t \in [a,b]$.

Usualmente pensamos en α como una curva de puntos. En particular si las funciones coordenadas α_i son de grado menor o igual que n , entonces $\alpha(t)$ es una curva polinómica de grado n en t (Pogorélov, 1997, p.17).

Ejemplo 2.16. A continuación mostraremos algunos ejemplos de curvas.

- **La Recta:** Es la clase más simple de \mathbb{R}^2 ; sus funciones coordenadas son lineales:

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \mathbf{p} + t\vec{q} = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2) \text{ y } \vec{q} \neq 0$$

De manera explícita, la curva α es la recta que pasa por el punto $\mathbf{p} = \alpha(\mathbf{0})$ en la dirección de \vec{q} .

Para graficar con el software científico *Mathematica 9*, se digita:

ParametricPlot[[$p_1 + tq_1, p_2 + tq_2$], { t, t_{min}, t_{max} }]

La siguiente gráfica se obtiene para $p_1 = 1, p_2 = 1$ y $q_1 = 3, q_2 = 2$

ParametricPlot[[$1+3t, 1+2t$], { $t, -5, 5$ }]

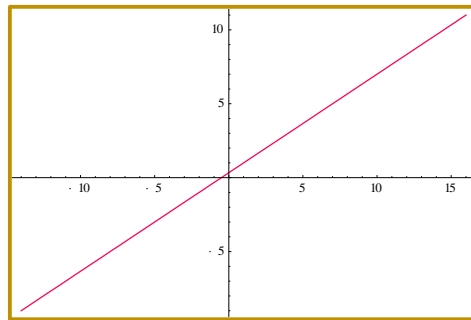


Figura 2. 3. Una recta con dominio en $[-15, 15]$

- **Una Espiral:** Está determinada por:

$$\alpha(t) = \{t \cos[t], t \sin[t]\}, t \in \mathbb{R}$$

Graficando en el software científico *Mathematica 9*:

ParametricPlot[[$t \cos[t], t \sin[t]$], { $t, 0, 8 \pi$ }]

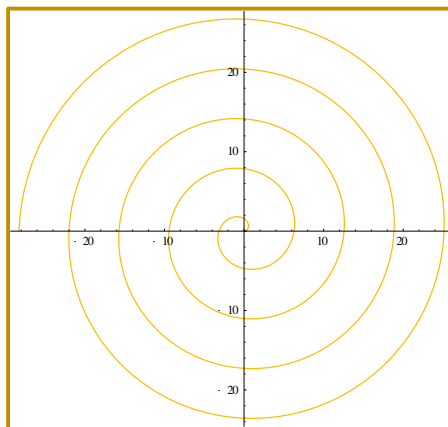


Figura 2. 4. Grafica de la espiral $\alpha(t) = \{t \cos[t], t \sin[t]\}, t \in \mathbb{R}$

- **La Circunferencia:** Una circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio r , está determinada por:

$$\alpha(t) = \{\cos[t], \sin[t]\}, t \in \mathbb{R}$$

La siguiente gráfica se obtiene para $r = 1$

ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t,0,8 π }]

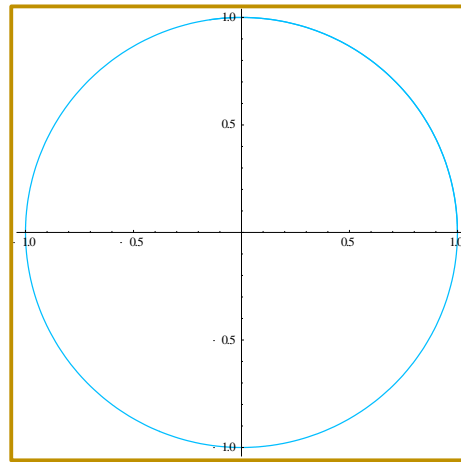


Figura 2. 5. Gráfica de la circunferencia $\alpha(t) = \{\text{Cos}[t], \text{Sin}[t]\}, t \in \mathbb{R}$

- **La Elipse:** Una Elipse de centro en el origen de coordenadas, esta determinada por:

$$\alpha(t) = \{m \text{Cos}[t], n \text{Sin}[t]\} \text{ donde } t, m, n \in \mathbb{R}$$

Graficando en el software científico *Mathematica 9*, para $n = 2$, $m = 1$

ParametricPlot[{Cos[t], 2 Sin[t]}, {t,0,8 π }]

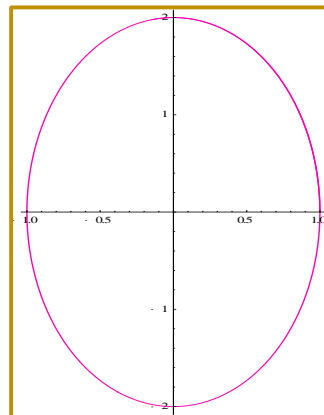


Figura 2. 6. Gráfica de la Elipse $\alpha(t) = \{\text{Cos}[t], 2\text{Sin}[t]\}, t \in \mathbb{R}$

- **Curva Polinómica:** Una función Polinómica, está determinada por:

$$\alpha(t) = \{t, a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 t^0\} \text{ donde } t, a_i \in \mathbb{R}; \forall i \in \mathbb{N}$$

Graficando en el software científico *Mathematica 9*:

ParametricPlot[$\{t, t^3 - t^2 + 2t\}, \{t, 2, 2\}$]

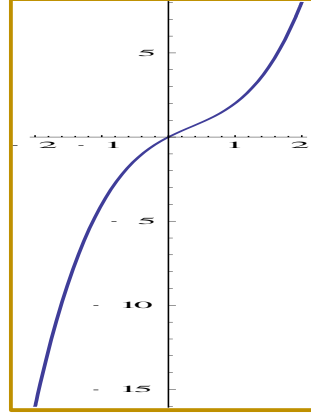


Figura 2. 7. Gráfica de la función $\alpha(t) = \{t, t^3 - t^2 + 2t\}$, $t \in \mathbb{R}$

2.2.4 Representación de Bézier

Toda curva polinómica $\alpha(t) = \{t, a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 t^0\}$ admite una representación mediante su polígono de Bézier. Es por ello que podemos decir que existe una relación geométrica entre la curva polinómica y su polígono de Bézier. Ambos tienen los mismos puntos de extremos y las tangentes con estos puntos coinciden; la curva yace en la capsula convexa del polígono (Paluszny et al, 2002).

2.2.4.1 Polinomios de Bernstein

Consideremos el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n , en una variable t , que denotamos por P_n . Una base de P_n está constituida por el conjunto de los polinomios $\{1, t, \dots, t^n\}$ lo cual significa que todo polinomio $P(t) \in P_n$ se puede expresar de manera única como combinación lineal de los polinomios de esta base.

Definición 2.14. Los polinomios de Bernstein de grado n , que denotamos por $B_{0,n}, B_{1,n}, \dots, B_{n,n}$ son (Paluszny et al, 2002).

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

siendo

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! (n-i)!}$$

Así mismo determinamos los Polinomios de Bernstein para $n = 2$

$$B_i^2(t) = \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i, \quad i = 0, 1, 2$$

Al reemplazar los valores de, $i = 0, 1, 2$. Se tiene

$$\checkmark \quad B_0^2(t) = \binom{2}{0} (1-t)^2 t^0 = \frac{2!}{0!(2-0)!} (1-t)^2 = (1-t)^2$$

$$\checkmark \quad B_1^2(t) = \binom{2}{1} (1-t)^{2-1} t^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} (1-t)^{2-1} = 2(1-t)t$$

$$\checkmark \quad B_2^2(t) = \binom{2}{2} (1-t)^{2-2} t^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} (1-t)^{2-2} = t^2$$

Graficando los Polinomios de Bernstein $B_0^2(t), B_1^2(t), B_2^2(t)$ en el software *Mathematica 9*:

Plot[(1 - t)², 2(1 - t)t, t², {t, 0, 1}]

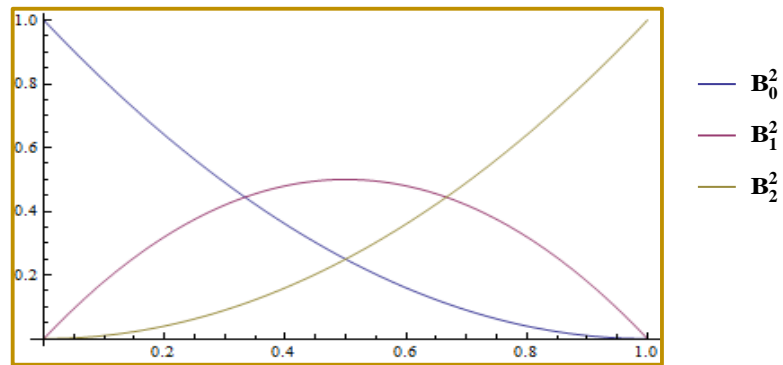


Figura 2. 8. Polinomios de Bernstein de grado 2

Luego generamos los polinomios Bernstein para $n = 6$

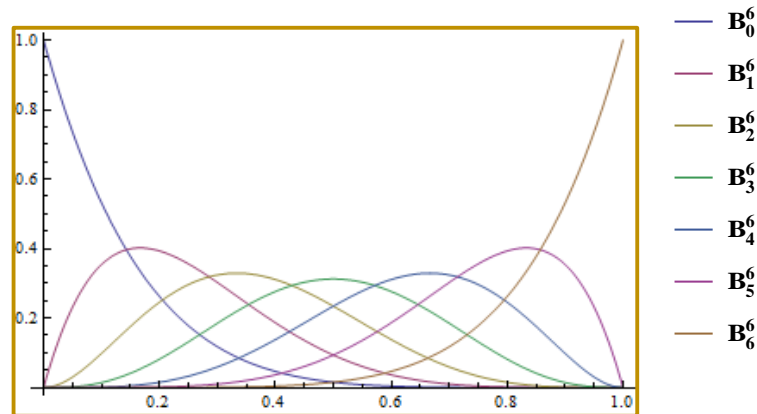


Figura 2. 9. Polinomios de Bernstein de grado 6

Sin duda alguna los polinomios de Bernstein pueden de ser de gran ayuda en la aproximación e interpolación de funciones. Es muy utilizado en los cursos de Calculo Simbólico que se dictan en la Facultad de ciencias.

2.2.4.2 Propiedades de los polinomios Bernstein

Dentro de las propiedades de los polinomios Bernstein tenemos:

- ✓ Son **linealmente independientes** (Paluszny et al, 2002, p.10)

De hecho dividiendo $\sum_{i=0}^n b_i (1-t)^{n-i} t^i = 0$ por $(1-t)^n$ y usando $s = \frac{t}{1-t}$ se obtiene $\sum_{i=0}^n b_i s^i = 0$, lo cual implica que $b_0 = b_1 = \dots = 0$

- ✓ Son **Simétricos**. (Paluszny et al, 2002, p.10)

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$$

- ✓ Las únicas **raíces** son 0 y 1. (Paluszny et al, 2002, p.10)

$$B_i^n(0) = B_{n-i}^n(1) = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 0 \\ 0 & \text{para } i > 0 \end{cases}$$

- ✓ Forman una partición de la unidad. (Paluszny et al, 2002, p.10)

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \text{ para todo } t \in [0,1]$$

- ✓ Son **positivos** en $[0,1]$. (Paluszny et al, 2002, p.10)

$$B_i^n(t) > 0 \text{ para } t \in [0,1]$$

- ✓ Satisfacen la **relación de recurrencia**

$$B_i^{n+1}(t) = t B_{i-1}^n(t) + (1-t) B_i^n(t)$$

Donde $B_{-1}^n \equiv B_{n-1}^n \equiv 0$ y $B_0^0 \equiv 1$

Esta relación de recurrencia se obtiene de la identidad

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$$

Para poder visualizar la representación gráfica de los polinomios Bernstein, se utilizó el comando **Plot** del Software científico Mathematica 9. Otra forma de graficar estos polinomios es utilizando el comando **ParametricPlot**, pero se tendría que graficar por separado cada polinomio luego tener que unirlos utilizando el comando **Show** del Software científico Mathematica 9.

2.2.4.3 Curvas de Bézier

Definición 2.15. Se denomina curva de Bézier asociada a $n + 1$ puntos P_0, P_1, \dots, P_n , de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , a la curva parametrizada, definida para $t \in [0,1]$, cuyos puntos vienen dados mediante la siguiente expresión (Paluszny et al, 2002, p.10).

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i$$

Donde los $B_i^n(t)$ son los polinomios de Bernstein de grado n .

Los puntos P_0, P_1, \dots, P_n que determinan una curva de Bézier se denominan puntos de control, y la poligonal que los une es el polígono Bézier o B-polígono.

Ejemplo 2.17. Graficar la curva de Bézier si se tiene los puntos siguientes de control:

$$P_0 = (0,0); P_1 = (1,0) \text{ y } P_2 = (1,1)$$

En efecto: para ello recordamos que la curva α , esta denotada por

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) P_i$$

Para $i=0,1,2$, donde tenemos que:

$$\alpha(t) = B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2$$

Se reemplaza los polinomios de Bernstein

$$\alpha(t) = (1-t)^2\{0,0\} + 2(1-t)t\{1,0\} + t^2\{1,1\}$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\alpha(t) = \{0,0\} + \{2(1-t)t, 0\} + \{t^2, t^2\}$$

Sumando primeras y segundas componentes

$$\alpha(t) = \{2t - 2t^2 + t^2, t^2\}$$

Obtenemos

$$\alpha(t) = \{2t - t^2, t^2\}$$

Ahora graficamos la curva $\alpha(t) = \{2t - t^2, t^2\}$

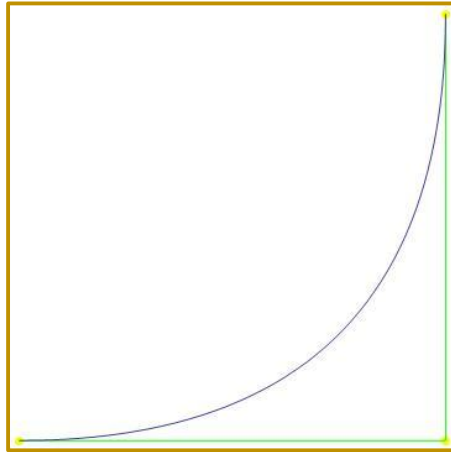


Figura 2. 10. Curva de Bézier dados los puntos de control $P_0 = (0,0)$; $P_1 = (1,0)$ y $P_2 = (1,1)$

Observación 8.: Entre más puntos tenga el polígono de control más posibilidades hay para manipular las curvas de Bézier.

La fórmula de elevación del grado permite escribir relaciones entre las curvas que se obtienen al incluir puntos adicionales de control. Sin embargo, es igualmente claro que mientras mayor sea el grado, mayor será el costo computacional.

En otras palabras el tiempo requerido para realizar dichos cálculos es mayor al requerido si se trabaja con menos puntos de control.

2.2.5 Conceptos de Fractales

Un fractal es un ente matemático que no se define de la manera habitual como se definen otros conceptos matemáticos. Se caracteriza por una propiedad de invariancia en presencia de cambios de escala. Esta propiedad se denomina auto-semejanza y puede presentarse de maneras y formas muy distintas: en algunos casos, la auto-semejanza es matemática exacta y hablamos de fractales deterministas, mientras que en otros casos, que se encuentran en el mundo real que nos rodea, la auto-semejanza es aproximada.

Los fractales deterministas constituyen un nuevo tipo de Geometría: la Geometría Fractal, que es, ante todo, un nuevo lenguaje. Mientras que los elementos de nuestra bien conocida Geometría Euclidiana son líneas, círculos, esferas, etc., los elementos de la Geometría Fractal escapan a la percepción directa. Ello se debe a que son algoritmos que solamente la computadora puede convertir en formas y estructuras. El principio de auto-semejanza se presenta aproximadamente en la naturaleza: en líneas costeras y en cuencas de ríos, en la formación de nubes y en el crecimiento de árboles y en la organización jerárquica de sistemas vivos.

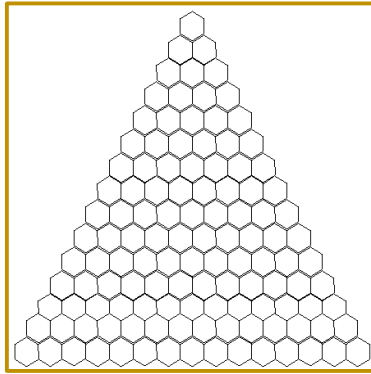


Figura 2. 11. Naturaleza fractal

Fuente: introducción al mundo fractal (Hott y Gutiérrez, 2004)

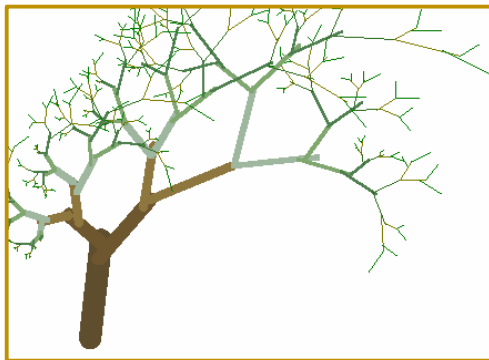


Figura 2. 12. Naturaleza fractal

Fuente: introducción al mundo fractal (Hott y Gutiérrez, 2004)

En la investigación de Perrera et al (2007) propone diversas definiciones de fractales pero no existe todavía una suficientemente definición de un fractal. En principio, se acuerda en no definir un fractal sino enumerar sus propiedades características, dentro de ella se tiene:

- Un fractal tiene una estructura fina; esto es, mayor detalle en escalas arbitrariamente pequeñas.
- Un fractal es demasiado irregular para ser descrito con la Geometría Euclidiana tradicional, tanto local como globalmente.
- Con frecuencia, un fractal tiene una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística.
- Los fractales son objetos cuya dimensión es fraccionaria.
- En general, la dimensión fractal es mayor que la dimensión topológica.
- En muchos casos interesantes, el fractal se define en forma muy simple, por lo general, con un método recursivo.

En la siguiente figura se muestran algunos objetos que cumplen con las propiedades de fractales

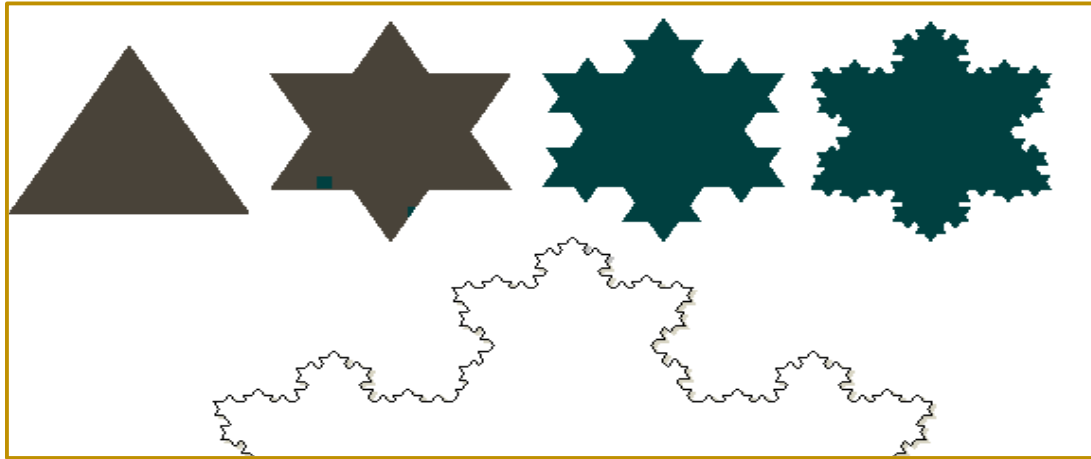


Figura 2. 13. Imagen Fractal

Fuente: introducción al mundo fractal (Hott y Gutiérrez, 2004)

2.2.5.1 Dimensión Topológica

Definición 2.16. Representa el número de coordenadas o de grados de libertad que necesitamos para describir el objeto (Perrera et al 2007).

La dimensión topológica mide la habilidad para cubrir un objeto con conjuntos abiertos de radio pequeño. Una dimensión topológica cero describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que son disyuntos. La dimensión topológica uno describe un conjunto que puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos con sólo una intersección entre adyacentes pares de ellos. Un conjunto es considerado de dimensión topológica dos si puede ser cubierto por pequeños conjuntos abiertos que se intersecan sólo tres veces... La dimensión topológica usualmente tiene el mismo valor que la dimensión euclídea. (Rivera, 2011, p.270)

Definición 2.17. La dimensión euclídea hace referencia al número de direcciones perpendiculares diferentes que se pueden tomar. En nuestro mundo cotidiano contamos con tres direcciones: izquierda-derecha, adelante-atrás, y arriba-abajo; por este motivo decimos que el espacio en que nos movemos es tridimensional. . (Rivera, 2011)

La auto-semejanza está fuertemente conectada con nuestro concepto intuitivo de "dimensión". Matemáticamente, se tiene que la Dimensión Topológica de:

- Conjunto vacío es -1
- Un punto es 0
- Una línea recta es 1
- Un Cuadrado es 2
- Un Cubo es 3

2.2.5.2 Dimensión Fractal

Un contenido lineal se calcula sumando pasos r elevados al exponente uno, que es la dimensión de la línea recta. Un contenido de superficie se calcula sumando pasos r (donde r es el lado de cada uno de los cuadrados que compone la superficie) elevados al exponente dos, que es la dimensión del plano. Un contenido de volumen se calcula sumando pasos r (donde r es el lado de cada uno de los cubos que compone el volumen elevados al exponente tres, que es la dimensión del espacio. (Rivera, 2011, p.270)

La genialidad de Mandelbrot consistió en intuir que podían existir configuraciones con dimensiones no enteras. Por ejemplo, un segmento puede dividirse en N partes idénticas, cada una de las cuales estará en la relación $r = 1/N$ con el segmento total (Perrera et al 2007).

Análogamente, un cuadrado en el plano puede dividirse en cuadrados más pequeños auto-semejantes que estarán en la relación $r = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$ con la figura completa.

Lo mismo sucederá con un cubo dividido en cubos más pequeños. En ese caso, $r = \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}$.

De esta manera un objeto auto-semejante D – dimensional puede dividirse en copias más pequeñas del mismo que estén en la relación $r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}}$ con el todo. O bien

$$N = \frac{1}{r^D}$$

de donde despejamos la dimensión fractal D

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} \quad (1)$$

Por supuesto, D no precisa ser un número entero y los logaritmos pueden tomarse en cualquier base. Pero su valor numérico para una curva plana auto-semejante representa cuantitativamente cuán irregular es la curva. Esto es, si la dimensión fractal de la misma está más cerca de 2 que de 1, la curva tenderá a llenar prácticamente todo el plano. (Perrera, Perrera, & Vera W, Geometría Fractal, 2007)

Ejemplo 2.18. A una recta de longitud 1 hagamos 4 particiones, entonces $N = 4$ y $r = \frac{1}{4}$



Figura 2. 14. Dimensión de la recta

Fuente: introducción al mundo fractal (Hott y Gutiérrez, 2004)

luego aplicando la formula(1) se obtiene:

$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{4}}} = \frac{\log 4}{\log 4} = 1$$

La dimensión de una recta es 1.

Ejemplo 2.19. A una cuadrado particionemolo en 9 cuadrados pequeños, entonces $N = 9$ y $r = \frac{1}{3}$

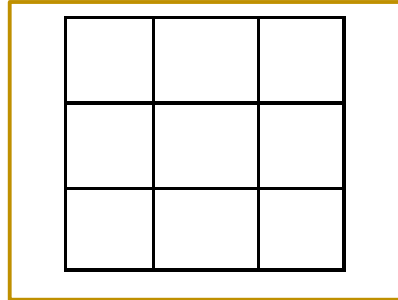


Figura 2. 15. Dimensión de un cuadrado

Fuente: introducción al mundo fractal (Hott y Gutiérrez, 2004)

luego aplicando la formula (1) se obtiene:

$$D = \frac{\log 9}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 3^2}{\log 3} = 2 \frac{\log 3}{\log 3} = 2$$

Ejemplo 2.20. Particionemos 1 cubo en 27 cubos pequeños, entonces $N = 27$ y $r = \frac{1}{3}$

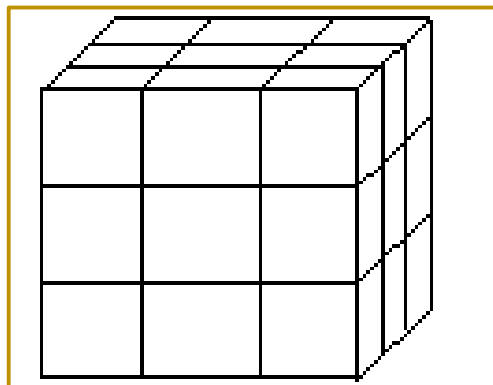


Figura 2. 16. Dimensión de un cubo

Fuente: introducción al mundo fractal (Hott y Gutiérrez, 2004)

luego aplicando la formula (1) se obtiene:

$$D = \frac{\log 27}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 3^3}{\log 3} = 3 \frac{\log 3}{\log 3} = 3$$

La dimensión de un cubo es 3.

2.2.6 Conjunto de Cantor

Fue descrito en 1883 por Georg Cantor (1845-1918), pero fue mencionado en 1875 (posiblemente antes) por el matemático Irlandés Henry Smith. Como ejemplo de conjunto de longitud cero cuyos puntos se pueden identificar uno a uno con todos los puntos de una recta (que tiene longitud infinita).

Para su construcción se parte de un segmento de longitud 1. Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central abierta (es decir, sin incluir los extremos). Cada una de las otras dos se divide en tres partes iguales y se eliminan las partes centrales (abiertas) en cada una de ellas. Se procede igual con cada uno de los cuatro segmentos que quedan. Y se repite el proceso infinitas veces.

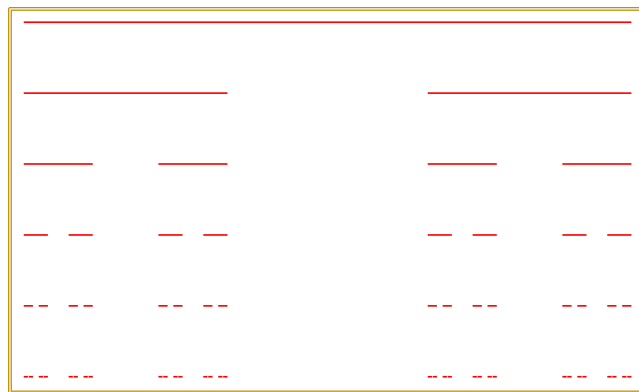


Figura 2. 17. Dimensión del conjunto de cantor.

Ejemplo 2.21. Para hallar la dimensión del conjunto de Cantor se tiene que $N = 2$ y $r = \frac{1}{3}$

$$D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \dots$$

La dimensión del conjunto de Cantor es 0.6309...

2.2.7 La curva de Koch

La curva de Koch fue ideada por Helge von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente en cualquier punto. Su construcción se hace mediante un proceso similar al del conjunto de Cantor. Se parte de un segmento de longitud 1. El primer paso consiste en dividirlo en tres intervalos iguales, construir un triángulo equilátero sobre el

intervalo central y suprimir la base de dicho triángulo. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los cuatro intervalos que han resultado. Y se repite el proceso infinitas veces. La curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso.

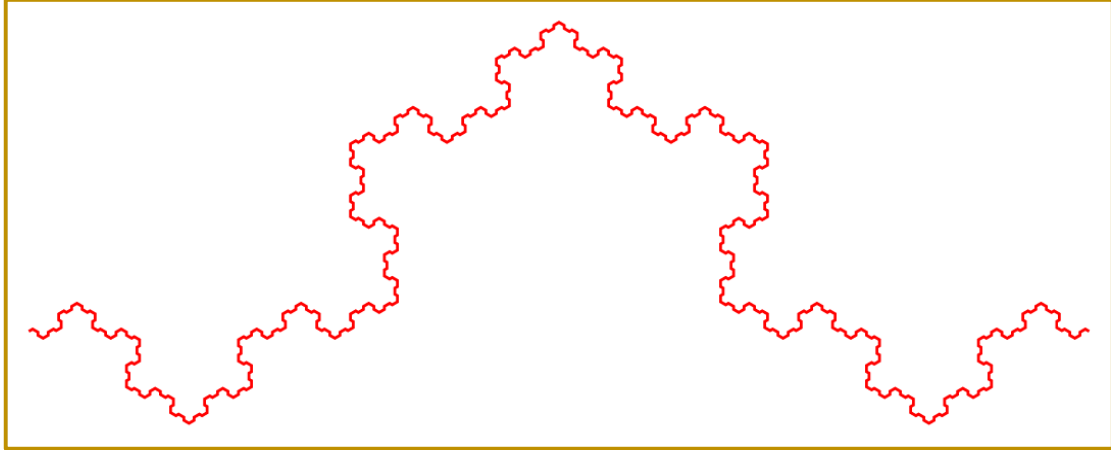


Figura 2. 18. Dimensión de la curva de Koch.

Ejemplo 2.22. Para hallar la dimensión de la curva de Koch en la segunda iteración, se tiene que $N = 4$ y $r = \frac{1}{3}$

$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618 \dots$$

La dimensión de la curva de Koch es $1.2618 \dots$

Aplicando este mismo proceso a los lados de un triángulo equilátero se obtiene la siguiente curva:

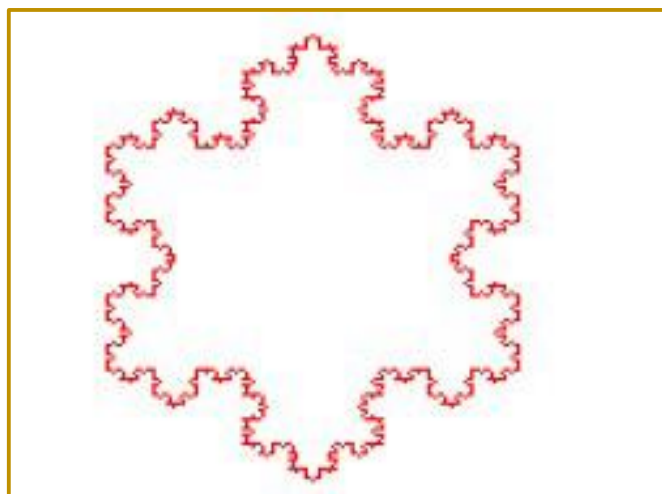


Figura 2. 19. Curva cerrada de Koch.

Fuente: introducción al mundo fractal (Hott y Gutiérrez, 2004)

La longitud de la curva límite crece indefinidamente, notemos que la curva límite acota una región de área finita en el plano. Esta curva límite es llamada copo de nieve de Koch.

2.2.8 Cadena infinita de Fibonacci

En esta sección presentaremos algunas definiciones sobre la cadena de Fibonacci, y como es que podemos relacionarla con el homomorfismo de Fibonacci.

2.2.8.1 La Cadena de Fibonacci

Definición 2.18. La cadena n –ésima de Fibonacci f_n se define recursivamente por $f_0 = 1$

$f_1 = 0$ y $f_n = f_{n-1}f_{n-2} \quad \forall n \geq 2$. Definimos la cadena infinita de Fibonacci f como:

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0100101001001 \dots$$

Definición 2.19. Definimos el homomorfismo σ de Fibonacci como: $\sigma: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ donde $\sigma(0) = 01$ y $\sigma(1) = 0$.

El siguiente teorema permite generar la cadena de Fibonacci a partir de la iteración del homomorfismo σ .

Teorema 2.2. La cadena f de Fibonacci satisface que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n = f$$

Demostración

Demostraremos que $\sigma^n(1) = f_n$ y $\sigma^n(0) = f_{n+1} \quad \forall n \geq 0$. El argumento es por inducción sobre n

- Para $n = 0$ y $n = 1$, se tiene claramente

$$f_0 = 1, f_1 = 0$$

ahora iterando el homomorfismo

$$\sigma^0(1) = 1$$

$$\sigma^1(1) = \sigma(1) = 0$$

- Supongamos que se tiene para $n = h$ luego

$$\sigma^h(1) = f_h \quad y$$

$$\sigma^h(0) = f_{h+1}$$

- Probaremos que se cumple para $n = h + 1$

$$\sigma^{h+1}(1) = \sigma^h \sigma(1) = \sigma^h(0) = f_{h+1}$$

$$\sigma^{h+1}(0) = \sigma^h \sigma(0) = \sigma^h(01) = \sigma^h(0)\sigma^h(1) = f_{h+1}f_h = f_{h+2}$$

De lo anterior se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = f$

■

A partir de este teorema se obtiene la cadena f_n en términos del homomorfismo σ

$$\sigma^0(1) = f_0 = 1$$

$$\sigma^1(1) = f_1 = 0$$

$$\sigma^3(1) = f_3 = 01$$

$$\sigma^3(1) = f_3 = 010$$

$$\sigma^4(1) = f_4 = 01001$$

$$\sigma^5(1) = f_5 = 01001010$$

$$\sigma^6(1) = f_6 = 0100101001001$$

$$\sigma^7(1) = f_7 = 010010100100101001010$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\sigma^n(1) = f_n = 010010100100101001010$$

Proposición 2.1. La cantidad $|f_n|$ de símbolos en f_n , es el n -ésimo número de Fibonacci F_n . *i. e.*

$$|f_n| = F_n.$$

Demostración

Por definición $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$ y $|f_0| = |f_1| = 1$, luego $|f_n| = |f_{n-1}| + |f_{n-2}|$

$$\therefore |f_n| = F_n$$

■

$$|f_0| = |1| = 1$$

$$|f_1| = |0| = 1$$

$$|f_2| = |01| = 2$$

$$|f_3| = |010| = 3$$

$$|f_4| = |01001| = 5$$

$$|f_5| = |01001010| = 8$$

$$|f_6| = |0100101001001| = 13$$

$$|f_7| = |010010100100101001010| = 21$$

El siguiente algoritmo permite generar los símbolos de la cadena finita f_n de Fibonacci

```
Fibonacci[n_Integer]:=Module[{out= {}, f},
f[0]=1; f[1]=0; For[i=2,i ≤ n, i++, out=f[i];
f[i]=Flatten[Flatten[ {f[i-1], f[i-2] }]];]; out]
```

Cuadro 2. 1. Código para generar la cadena de Fibonacci

Generamos la cadena de Fibonacci Para $n = 6$

Fibonacci[6]={0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1}

La cadena de Fibonacci es una cadena binaria, por lo que sus únicos elementos son: 0 y 1.

Observación 9.: El mini-programa del cuadro 2.1 permite definir la cadena de Fibonacci utilizando comandos básicos, tales como: For y Flatten.

2.2.8.2 Propiedades de la Cadena de Fibonacci

A continuación se presentan algunas propiedades de la cadena de Fibonacci, que permiten obtener información de su curva fractal asociada.

Proposición 2.2. La cadena 11 no es subcadena de la cadena de Fibonacci.

Demostración.

El argumento es por inducción sobre n .

- Para $n = 0$, comprobaremos que se verifique $f_0 = 1$. Es verdadero
- Supongamos que se cumple para $n = h$. Entonces la cadena 11 no es subcadena de f_h
- Ahora probaremos que se cumple para $n = h + 1$ como $f_{h+1} = f_h f_{h-1}$

Por la hipótesis de inducción f_h y f_{h-1} no tienen como subcadena a 11, luego la única posibilidad que existe es que 1 sea un sufijo de f_h y a la vez un prefijo de f_{h-1} ; pero esto es una contradicción, ya que toda cadena f_h con $h \geq 1$ comienza con 0.

Luego se puede concluir que la cadena 11 no es subcadena de la cadena de Fibonacci.

■

Proposición 2.3. La cadena 000 no es subcadena de la cadena de Fibonacci.

Demostración.

El argumento es por inducción sobre n

- Para $n = 1$ comprobaremos que se verifique $f_1 = 0$. Es verdadero

- Supongamos que se cumple para $n = h$. Entonces la cadena 000 no es subcadena de f_h
- Probaremos que se cumple para $n = h + 1$.

Como $f_{h+1} = f_h f_{h-1}$, por la hipótesis de inducción f_h y f_{h-1} no tienen como subcadena a 000, luego la única posibilidad que queda es que 0 sea un sufijo de f_h y 00 un prefijo de f_{h-1} ; pero esto es una contradicción, ya que toda cadena f_h con $h \geq 2$ comienza con 01.

■

Proposición 2.4. Sea ab un sufijo de la cadena de Fibonacci f_n . Entonces, para todo $n \geq 2$,

$ab = 01$ si n es par y $ab = 10$ si n es impar (i.e., sólo existen dos sufijos de longitud 2).

Demostración.

El argumento es por inducción sobre n .

- Si $n = 2$, entonces $f_2 = 01$;
- Si $n = 3$, entonces $f_3 = 010$. Es verdadero
- Supongamos que se cumple para $n = h$.
- Probaremos que se cumple para $n = h + 1$

Si $h + 1$ es par, entonces, como $f_{h+1} = f_h f_{h-1}$ y $h - 1$ es par, se tiene por hipótesis de inducción que f_{h-1} finaliza en 01 y por lo tanto f_{h+1} también. Análogamente

Si $h + 1$ es impar, entonces, como $f_{h+1} = f_h f_{h-1}$ y $h - 1$ es impar, se tiene por hipótesis de inducción que f_{h-1} finaliza en 10 y por lo tanto f_{h+1} también.

■

Proposición 2.5. $f_{n-1}f_{n-2}$ y $f_{n-2}f_{n-1}$ tienen un prefijo común de longitud $F_n - 2$ para $\forall n \geq 3$.

(i.e., $f_{n-1}f_{n-2}$ y $f_{n-2}f_{n-1}$ son iguales salvo por los dos últimos símbolos).

Demostración.

Por definición de f_n se tiene que

$$f_{n-1}f_{n-2} = f_{n-2}f_{n-3}f_{n-3}f_{n-4} = f_{n-3}f_{n-4}f_{n-3}f_{n-3}f_{n-4}$$

$$f_{n-2}f_{n-1} = f_{n-3}f_{n-4}f_{n-2}f_{n-3} = f_{n-3}f_{n-4}f_{n-3}f_{n-4}f_{n-3}$$

luego las cadenas tienen un prefijo común de longitud $F_{n-3} + F_{n-4} + F_{n-3}$. Por hipótesis de inducción $f_{n-3}f_{n-4}$ y $f_{n-4}f_{n-3}$ tienen un prefijo común de longitud $F_{n-2} - 2$. Por lo tanto las cadenas tienen un prefijo común de longitud

$$2F_{n-3} + F_{n-4} + F_{n-2} - 2 = F_{n-3} + F_{n-4} + F_{n-3} + F_{n-2} + F_{n-1} - 2 = F_{n-2} + F_{n-1} - 2$$

■

Corolario 2.1. $\Phi: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ se define como $\Phi(a_1 a_2 \cdots a_n) = a_1 a_2 \cdots a_{n-2}, \forall n \geq 2$, entonces se tiene que:

1. $\Phi(f_{n-1} f_{n-2}) = \Phi(f_{n-2} f_{n-1}), n \geq 3$.
2. $\Phi(f_n) = f_{n-2} \Phi(f_{n-1}), n \geq 3$.

Demostración de 1

El argumento es por inducción sobre n

Por la **Proposición 2.5.** se tiene que $f_{n-1} f_{n-2}$ y $f_{n-2} f_{n-1}$ son iguales salvo por los dos últimos símbolos).

Luego como $\Phi(f_{n-1} f_{n-2})$ elimina los 2 últimos términos y $\Phi(f_{n-2} f_{n-1})$ elimina los 2 últimos términos podemos deducir que

$$\Phi(f_{n-1} f_{n-2}) = \Phi(f_{n-2} f_{n-1})$$

Demostración de 2

$\Phi(f_{n-1} f_{n-2})$ elimina los 2 últimos términos de la cadena f_n .

$\Phi(f_{n-1})$ elimina los 2 últimos términos de f_{n-1} , luego al concatenar con f_{n-2} , siendo este el prefijo y $\Phi(f_{n-1})$ el subfijo, Podemos concluir que

$$\Phi(f_n) = f_{n-2} \Phi(f_{n-1})$$

■

Proposición 2.6. $\Phi(f_n)$, es un palíndromo para todo , $n \geq 2$ (i.e. $\Phi(f_n)$ es palindromo salvo por los dos últimos símbolos).

Demostración.

El argumento es por inducción sobre n

- Si $n = 2$, entonces $\Phi(f_n) = \lambda$, la cual es palíndromo.
- Supongamos que se cumple para $n = h$.
- Probaremos que se cumple para $n = h + 1$

Como $f_{h+1} = f_h f_{h-1}$ y $|f_{h-1}| \geq 2$, entonces $\Phi(f_{h+1}) = f_h \Phi(f_{h-1})$. Por lo tanto,

$$\Phi(f_{h+1})^{-1} = (f_h \Phi(f_{h-1}))^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi(f_{h-1})^{-1} f_h^{-1} \\
&= \Phi(f_{h-1}) f_h^{-1}
\end{aligned}$$

Si h es par, entonces por la **Proposición 2.4.** se tiene que $f_h = \Phi(f_h)01$ luego

$$\begin{aligned}
\Phi(f_{h+1})^{-1} &= \Phi(f_{h-1})(\Phi(f_h)01)^{-1} \\
&= \Phi(f_{h-1})10\Phi(f_h)^{-1} \\
&= f_{h-1}\Phi(f_h) \\
&= \Phi(f_{h+1})
\end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene por el **Corolario 2.1.**

Para h impar por la **Proposición 2.4.** Se tiene que $f_h = \Phi(f_h)10$ luego

$$\begin{aligned}
\Phi(f_{h+1})^{-1} &= \Phi(f_{h-1})(\Phi(f_h)10)^{-1} \\
&= \Phi(f_{h-1})01\Phi(f_h)^{-1} \\
&= f_{h-1}\Phi(f_h) \\
&= \Phi(f_{h+1})
\end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene por el **Corolario 2.1.**

■

Teorema 2.3. Para toda cadena finita $f_n, n \geq 6$ se tiene que:

$$f_n = f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}l_{n-3}l_{n-3},$$

$l_n = \Phi(f_n)ab$ (i.e. permuta los dos últimos símbolos de f_n).

Demostración.

Por definición de f_n se tiene que

$$\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1}f_{n-2} \\
&= (f_{n-2}f_{n-3})(f_{n-3}f_{n-4}) \\
&= f_{n-3}f_{n-4}(f_{n-4}f_{n-5})f_{n-3}f_{n-4} \\
&= f_{n-3}f_{n-4}(f_{n-5}f_{n-6})f_{n-5}(f_{n-4}f_{n-5})f_{n-4} \\
&= f_{n-3}(f_{n-4}f_{n-5})f_{n-6}(f_{n-5}f_{n-4})(f_{n-5}f_{n-4}) \\
&= f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}l_{n-3}l_{n-3}
\end{aligned}$$

■

Corolario 2.2. $\Phi(f_n) = \Phi(f_{n-3})ab\Phi(f_{n-3})p_{n-6}\Phi(f_{n-3})ba\Phi(f_{n-3})$, $n \geq 6$

Demostración.teor

Por el **Teorema 2.3.**, se tiene que

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-3}f_{n-6}l_{n-3}l_{n-3} \\ &= (\Phi(f_{n-3})ab)(\Phi(f_{n-3})ab)f_{n-6}(\Phi(f_{n-3})ba)(\Phi(f_{n-3})ba) \\ &= \Phi(f_{n-3})ab\Phi(f_{n-3})(abf_{n-6})\Phi(f_{n-3})ba\Phi(f_{n-3})ba \\ &= \Phi(f_{n-3})ab\Phi(f_{n-3})p_{n-6}p_{n-3}ba\Phi(f_{n-3})bap_{n-3}ba, \end{aligned}$$

así se tiene que

$$\Phi(f_n) = \Phi(f_{n-3})ab\Phi(f_{n-3})p_{n-6}\Phi(f_{n-3})ba\Phi(f_{n-3})$$

■

Estos dos últimos resultados son importantes, ya que permiten descomponer f_n en términos de cadenas de Fibonacci de longitud menor, lo cual implica que la curva fractal de Fibonacci tiene características de autosemejanza; también es autosimilar, en el sentido de que contiene copias de sí misma, inmersas dentro de sí; para verlo, separemos las parejas 01 y cada una la reemplazamos por 0; luego reemplazamos los 0 no separados por 1

Ejemplo 2.23. Para f_6 obtenemos

$$\begin{aligned} f_6 &= \mathbf{01\ 0\ 01\ 01\ 0\ 01\ 0\ 01\ 01\ 0\ 01\ 01\ 0\ \dots} \\ &\quad 0100101001001\ \dots \end{aligned}$$

2.2.8.3 Representación gráfica

Para convertir una cadena de símbolos en una curva hay que recorrerla de una manera particular. Para ello, a cada uno de los símbolos de la cadena se le asigna una regla de dibujo que será interpretada por un recorrido en el plano. (Regla de dibujo Fibo). Realizando una determinada acción, la cual dependerá del símbolo que se lea en la cadena de símbolos. (Ramírez y Rubiano, 2012)

Las curvas obtenidas poseen una cierta autosimilitud, pero también podemos cambiar de curvas, haciendo un cambio en las acciones que se realizan en el momento del recorrido.

Los movimientos a realizarse en la creación de curvas responden a los comandos mostrados por los símbolos que aparecen en la tabla siguiente:

- El siguiente termino es el 0, avanzamos una unidad en el eje "Y" quedando así en el punto (2,0), y como el 0 está en una posición par gira 90° en sentido anti-horario, es decir para la siguiente lectura se avanzara en dirección del eje "X".
- Para la siguiente lectura se realiza el procedimiento detallado en el Cuadro 2.2.

2.2.8.5 Propiedades de la curva fractal de Fibonacci

A continuación mostraremos las propiedades de la curva fractal de Fibonacci.

Proposición 2.7. La curva fractal de Fibonacci \mathbb{F} está compuesta únicamente por segmentos de longitud 1 o 2.

Demostración.

Se tiene por la **Proposición 2.2.** y **Proposición 2.3.**, ya que no se permiten subcadenas de la forma 110 o 011

Es decir al encontrar subcadenas de la forma 11 se tendrán segmentos de longitud 2, y al leer un 0 antes o después de la subcadena 11 implica que el segmento es de longitud 3. Pero esto es imposible ya que en las cadenas de Fibonacci no existen subcadenas de la forma 110 o 011.

■

Proposición 2.8. El número de giros en la gráfica n -ésima de Fibonacci \mathbb{F}_n es el número de Fibonacci F_{n-1} .

La anterior propiedad es equivalente a la siguiente proposición, ya que por cada 0 se obtiene un giro en la curva.

Proposición 2.9. $|f_n|_0 = F_{n-1}$, ($n \geq 1$) es decir la cantidad de ceros en f_n es F_{n-1} .

Demostración.

El argumento es por inducción sobre n .

- Para $n = 1$ tenemos $|f_1|_0 = |0|_0 = 1 = F_0$
- Supongamos que se cumple para $n = h$, es decir $|f_h|_0 = F_{h-1}$
- Probaremos que se cumple para $n = h + 1$

$$|f_{h+1}|_0 = |f_h f_{h-1}|_0 = |f_h|_0 + |f_{h-1}|_0 = F_{h-1} + F_{h-2} = F_h$$

■

Teorema 2.4. La curva \mathbb{F}_n es similar a la curva \mathbb{F}_{n-3} (autosimilaridad).

Demostración.

Vamos a utilizar el homomorfismo σ^3 , donde σ es el homomorfismo de Fibonacci.

Es claro que $\sigma^3(f_{n-3}) = f_n$. Ahora veamos que σ^3 preserva la regla de dibujo par-impar. En efecto,

$$\sigma^3(0) = 01001 \text{ y}$$

$$\sigma^3(1) = 010$$

entonces si $|w|$ es par se tiene que σ^3 es concatenación de un número par de cadenas de longitud impar, σ^3 es par.

Análogamente, si $|w|$ es impar entonces σ^3 es impar. Así, σ^3 preserva la paridad, luego cualquier subcadena en la cadena de Fibonacci preserva la paridad de su posición.

Por otra parte, definimos $\alpha(w)$ como el ángulo en el que queda después de leer toda la cadena w . Así,

$$\alpha(00) = 0$$

$$\alpha(01) = -90^\circ$$

$$\alpha(10) = +90^\circ$$

Luego

$$\alpha(\sigma^3(00)) = \alpha(010010101) = 0^\circ$$

$$\alpha(\sigma^3(01)) = \alpha(01001010) = +90^\circ$$

$$\alpha(\sigma^3(10)) = \alpha(01001001) = -90^\circ$$

así que $\alpha(w) = -\alpha(\sigma^3(w))$, es decir σ^3 invierte el ángulo resultante. Por lo tanto la imagen de una curva por σ^3 es la simétrica de la curva dada por una simetría axial.

■

El **Teorema 2.4.** permite clasificar las curvas de Fibonacci en tres clases según la relación de equivalencia módulo 3, i.e., si n es de la forma $3k$, $3k + 1$ o $3k + 2$, Las gráficas son generadas con el comando del Cuadro 2.2. variando el número de la iteración del homomorfismo.

Teorema 2.5. La curva \mathbb{F}_n es simétrica. Específicamente

- La curva \mathbb{F}_{3k} tiene una simetría axial diagonal.
- La curva \mathbb{F}_{3k+1} tiene una simetría axial ortogonal.
- La curva \mathbb{F}_{3k+2} tiene una simetría central.

Demostración.

Por las propiedades de la cadena de Fibonacci, se tiene que $f_n = \Phi(f_n)ab$. con $\Phi(f_n)$ es un palíndromo, (ver **Proposición 2.6.**). Las dos últimas letras ab representan los dos últimos segmentos de \mathbb{F}_n , los cuales son despreciables cuando $n \rightarrow \infty$.

- Si el número de Fibonacci es par, entonces $|f_n|$ y $|p_n|$ son pares; así, si un cero está ubicado en la posición impar $2i + 1$ en p_n , entonces podemos encontrar otro cero (el simétrico) en la posición

$$F_n - 2 - (2i - 1)$$

el cual es también impar.

- Si el número de Fibonacci es impar, entonces $|f_n|$ y $|p_n|$ son impares; así, si un cero está ubicado en la posición par $2i$ en p_n , entonces podemos encontrar otro cero (el simétrico) en la posición

$$F_n - 2 - 2i$$

el cual es también par.

■

Teorema 2.6. La curva \mathbb{F}_n está compuesta por 5 curvas; específicamente,

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{n-3}\mathbb{F}_{n-3}\mathbb{F}_{n-6}\mathbb{F}_{n-3}^\circ\mathbb{F}_{n-3}^\circ$$

donde \mathbb{F}_n° se obtiene de aplicar la regla de dibujo a la cadena l_n .

Demostración.

Por el **Teorema 2.3.** se tiene que

$$f_n = f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}l_{n-3}l_{n-3},$$

$l_n = \Phi(f_n)ab$ (i.e. permuta los dos últimos símbolos de f_n).

Se pueden verificar que está compuesta por 5 curvas.

■

El **Teorema 2.4.** implica que \mathbb{F}_n es la concatenación de 4 copias de \mathbb{F}_{n-3} y una copia de \mathbb{F}_{n-6} .

2.2.8.6 Implementación Grafica en el software científico Mathematica 9

Para implementarlo en el Software científico *Mathematica 9*. Se tiene que adaptarlo al lenguaje del Software.

Empezamos la programación generando la cadena de Fibonacci la cual tiene como elementos el 0 y 1

- **CadenaFibonacci[n_]:=Nest[StringReplace[#, {0 → 01, 1 → 0}] &, 1, n]**

Donde ingresamos el valor de n para generar la cadena n -ésima de Fibonacci.

CadenaFibonacci[5]:= 01001010.

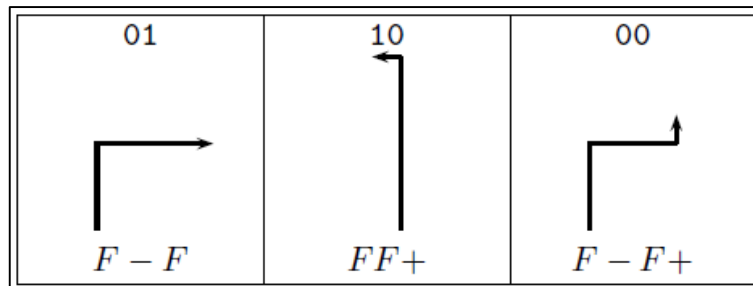
2.2.8.6.1 Conociendo los comandos del software científico *Mathematica 9*

El comando **StringReplace** reemplaza 0 por 01 y 1 por 0 empezando con 1, esto es porque $f_0 = 1$, luego este 1 lo reemplaza por 0 y así sucesivamente.

El comando **Nest** permite que se siga aplicando el proceso n veces, empezando en 1, es decir permite la iteración del homomorfismo.

- **CambiodeCadenaFibonacci[n]:=StringReplace[CadenaFibonacci[n],
{10 → FF+, 01 → F - F, 00 → F - F +}]**

En este algoritmo se cambian 10 por $FF+$, 01 por $F - F$ y 00 por $F - F +$



Cuadro 2. 3. Regla de dibujo para la cadena de Fibonacci

Fuente: Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica (Ramírez y Rubiano, 2012)

Para $n = 5$, hacemos el cambio de cadena

CambiodeCadenaFibonacci[5]= $F - FF - F + FF + FF +$

- **GenerarCadenaFibonacci[Z_String, δ _, α _] := Module[{x, y, θ , trasladar },
{x,y}={0,0}; $\theta = \alpha$; trasladar={{x, y}}; (Switch[#, "+", $\theta = \theta + \delta$;; "-", $\theta = \theta - \delta$;; "F",
{x,y}={x,y}+{Cos[θ], Sin[θ]}]; AppendTo[trasladar, {x, y}];) & / @Characters[Z];
Return[trasladar];]**

En este algoritmo las variables a ingresar son **Z_String** que representa un texto o cadena, δ y α es el ángulo a girar.

Definimos la nueva de regla dibujo Fibo de la siguiente manera:

<i>Símbolo</i>	<i>Función</i>
10	Traza una línea de longitud $2d$ y gira a la izquierda.
01	Traza una línea de longitud d , gira a la derecha y traza una línea de longitud d .
00	Traza una línea de longitud d , gira a la derecha, traza una línea de longitud d y gira a la izquierda

Cuadro 2. 4. Nueva regla de dibujo

Fuente: Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica(Ramírez y Rubiano, 2012)

Con esta regla de dibujo podemos empezar a graficar las curvas fractales.

A continuación se muestra la curva de Fibonacci:

- Para $n = 16$

```
cadena=CambiodeCadenaFibonacci[16];
```

```
GenerarCadenaFibonacci[cadena,90 Degree, 90 Degree];
```

```
Graphics[{Black, Line[%]}, PlotRange → All]
```

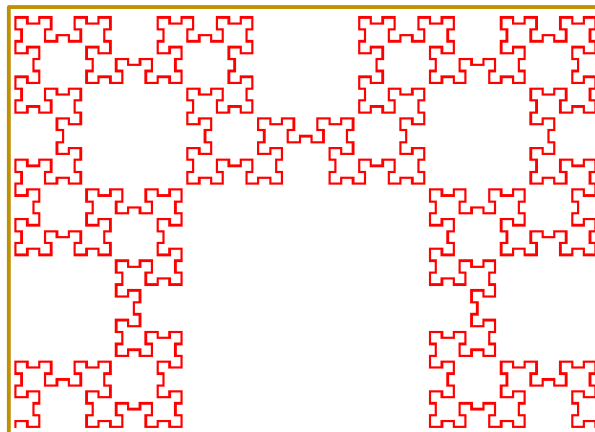


Figura 2. 20. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 16$

- Para $n = 17$

```
cadena=CambiodeCadenaFibonacci[17];
```

```
GenerarCadenaFibonacci[cadena,90 Degree, 90 Degree];
```

```
Graphics[{Black, Line[%]}, PlotRange → All]
```

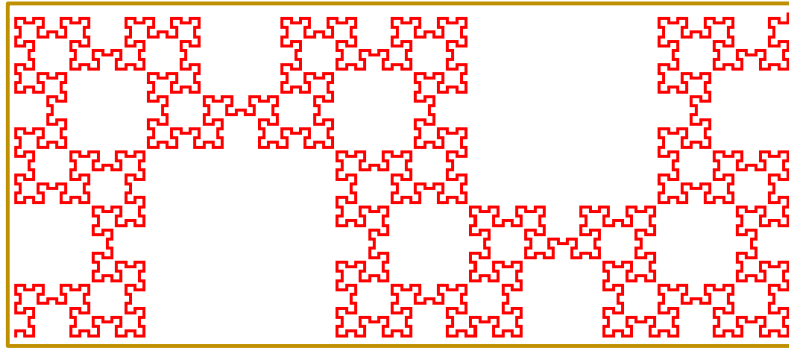


Figura 2. 21. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 17$

- Para $n = 18$

```
cadena=CambiodeCadenaFibonacci[18];
GenerarCadenaFibonacci[cadena,90 Degree, 90 Degree];
Graphics[{{Black, Line[%]}, PlotRange -> All]
```

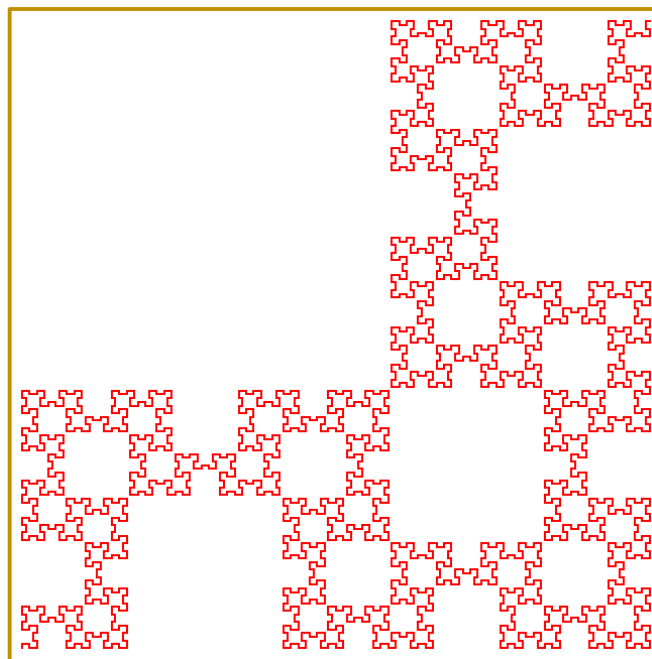


Figura 2. 22. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 18$

- Para $n = 19$

```
cadena=CambiodeCadenaFibonacci[19];
GenerarCadenaFibonacci[cadena,90 Degree, 90 Degree];
Graphics[{{Black, Line[%]}, PlotRange -> All]
```

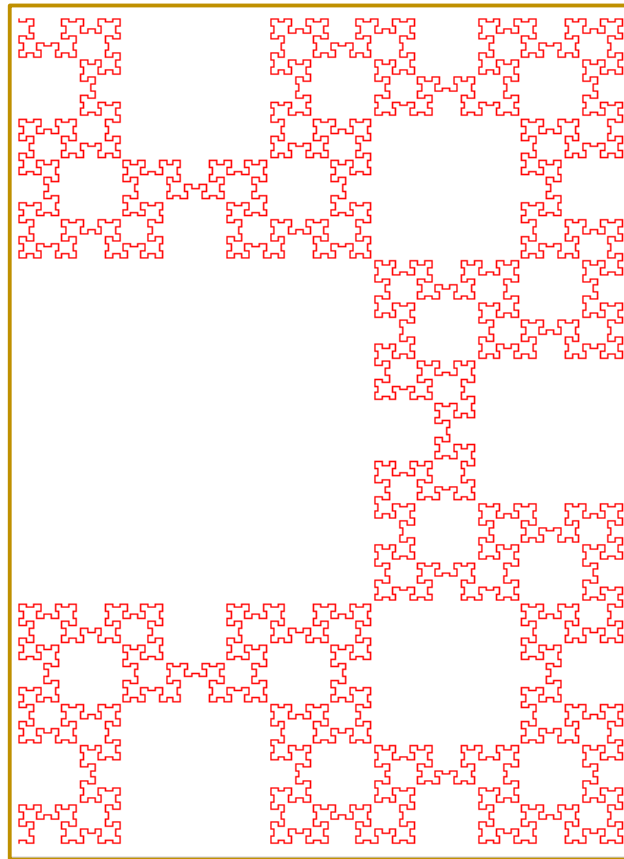


Figura 2. 23. Curva Fractal de Fibonacci para $n = 19$

A medida que incrementamos el valor de n , el costo computacional aumenta, a pesar de que la programación es avanzada.

Clasificación de las curvas Fractales de Fibonacci, según el **Teorema 2.4.**

- La curva \mathbb{F}_{3k} tiene una simetría axial diagonal.
- La curva \mathbb{F}_{3k+1} tiene una simetría axial ortogonal.
- La curva \mathbb{F}_{3k+2} tiene una simetría central.

A continuación presentamos la representación gráfica de la clasificación de las curvas de Fibonacci

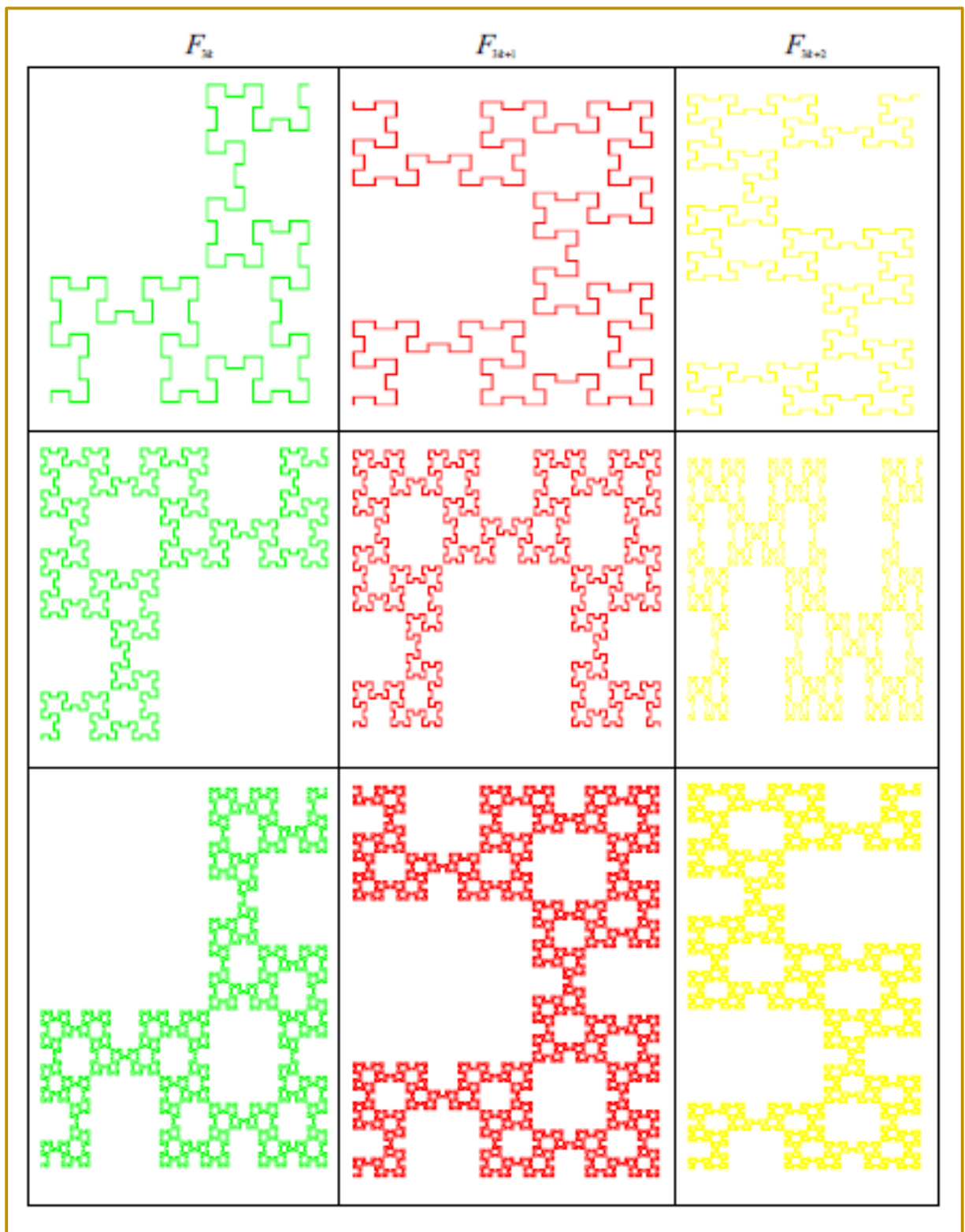


Figura 2. 24. Clasificación de \mathbb{F}_n

2.2.8.6.2 Casos Particulares

Al momento de cambiar el ángulo de giro en nuestro algoritmo:

```
cadena=CambiodeCadenaFibonacci[19];  
GenerarCadenaFibonacci[cadena,  $\delta, \alpha$ ];  
Graphics[{Black, Line[%]}, PlotRange  $\rightarrow$  All]
```

Cuadro 2. 5. Código para el cambio de ángulo la cadena de Fibonacci

Fuente: Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica(Ramírez y Rubiano, 2012)

Obtenemos otras curvas Fractales:

Un caso particular es cuando $\delta = 60^\circ$ y $\alpha = 30^\circ$, se obtiene la curva de **Koch**, la cual es sin duda alguna una hermosa curva fractal que posee autosimilitud.

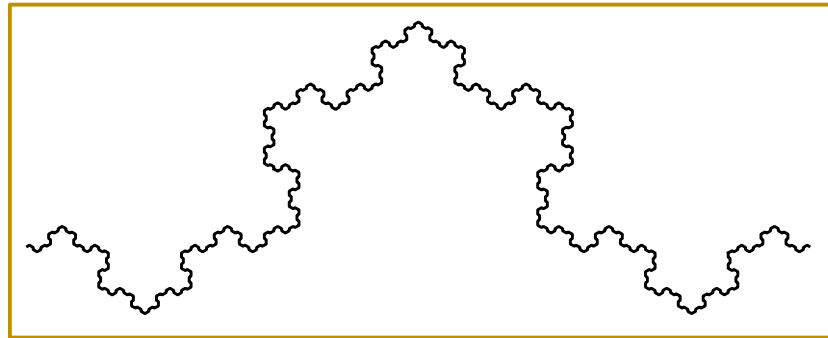


Figura 2. 25. Curva de Koch

- Para $n = 20$, $\delta = 120^\circ$ y $\alpha = 60^\circ$, se obtiene la curva

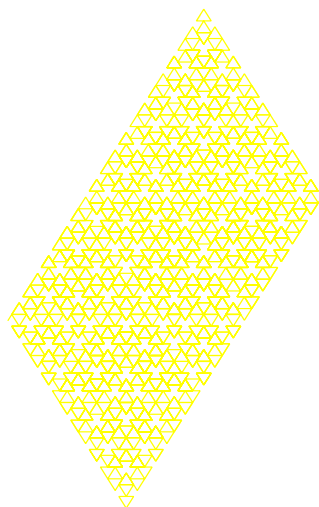


Figura 2. 26. Curva fractal de Fibonacci para $n = 20$, $\delta = 120^\circ$ y $\alpha = 60^\circ$

- Para $n = 17$, $\delta = 120^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$ se obtiene la curva

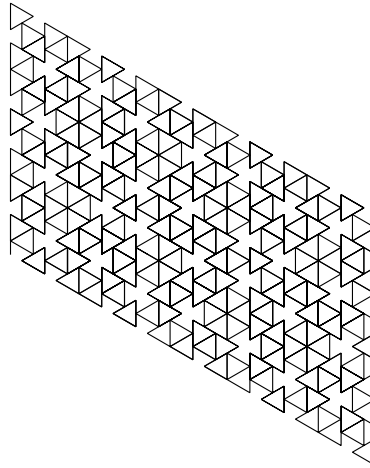


Figura 2. 27. Curva fractal para $n = 17$, $\delta = 120^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$

2.2.8.7 Algunas variaciones de la curva de Fibonacci

Como se pudo mostrar si cambiamos el ángulo de giro, obtenemos diferentes curvas Fractales, para ello mostraremos que todas estas curvas, tienen como atractor la curva de Fibonacci. Generaremos una nueva cadena de símbolos, llamada cadena densa de Fibonacci.

Definición 2.21. La cadena densa de Fibonacci \tilde{f} es la que resulta de aplicar el homomorfismo

$\eta(00) = 0$, $\eta(01) = 1$ y $\eta(10) = 2$ a la cadena de Fibonacci f así:

$$\tilde{f} = 102210221102110211022102211021102110221022101$$

Generamos la cadena densa de Fibonacci.

```
CF[n_]:=Nest[StringReplace[#,{"0" -> "01", "1" -> "0"\}],&"1",n]
CDCDF[n_]:=StringReplace[CF[n],{"00" -> "0", "01" -> "1", "10" -> "2"}];
α[n_]:=StringReplace[CDCDF[n],{"1" -> "2", "0" -> "01", "2" -> "10"\}];
CDCDF1[n_]:=StringReplace[α[n],{"0" -> "F", "1" -> "F-", "2" -> "F+"}];
c=CDCDF1[18]; GenerarCadenaFibonacci[c,90Degree,60Degree];
Graphics[{Black,Line[%]\},PlotRange -> All]
Código para generar la cadena de Fibonacci
```

Cuadro 2. 6. Código para generar la cadena densa de Fibonacci

Fuente: Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica(Ramírez y Rubiano, 2012)

Una vez generada la cadena densa de Fibonacci aplicamos la regla de dibujo Fibo

<i>Símbolo</i>	<i>Función</i>
F	Se avanza hacia adelante dibujando una línea de longitud d . Es decir, la posición cambia a (x', y', θ) , donde $x' = x + \text{Cos}[\theta]$ y $y' = y + \text{Sin}[\theta]$. Por lo tanto, se dibuja un segmento entre los puntos (x, y) y (x', y') .
+	Se gira en sentido anti horario un ángulo δ ; por lo tanto, la posición es $(x, y, \theta + \delta)$.
–	Se gira en sentido horario un ángulo δ ; por lo tanto, la posición es $(x, y, \theta - \delta)$.

Cuadro 2. 7. Lenguaje para la implementación en el software científico *Mathematica* 9.

Fuente: Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica(Ramírez y Rubiano, 2012)

Aplicando estas reglas de dibujo obtenemos la curva densa de Fibonacci,

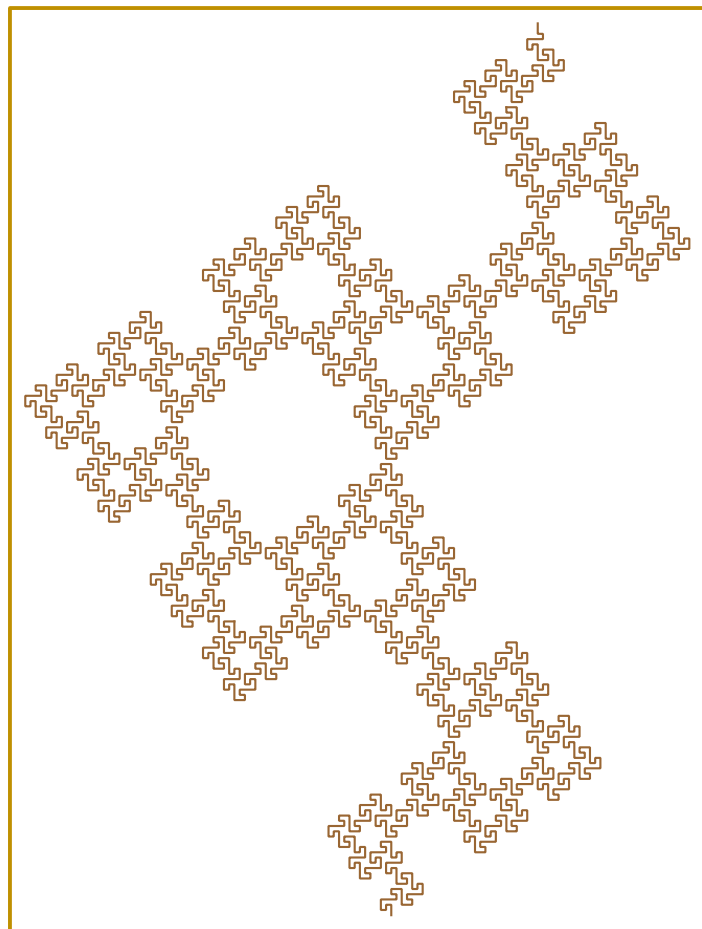


Figura 2. 28. Curva densa de Fibonacci

2.3 GLOSARIO DE TÉRMINOS BÁSICOS

- **Auto similitud:** Es la propiedad de un objeto (llamado objeto autosimilar) en el que el todo es exacta o aproximadamente similar a una parte de sí mismo.
- **Paridad:** Relación de igualdad o semejanza de dos o más cosas entre sí.
- **Simetría:** Es la correspondencia exacta en tamaño, forma y posición de las partes de un todo
- **Palíndromo:** Palabra o expresión que es igual si se lee de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.
- **Cadena:** Hace mención a una sucesión de eslabones que están unidos de alguna manera.
- **Concatenación:** vincular, ensamblar o acoplar distintos elementos.
- **Lenguaje:** Es una forma de comunicación a través de símbolos especiales para realizar cálculos matemáticos.
- **Algoritmo:** Conjunto ordenado de operaciones sistemáticas que permite hacer un cálculo y hallar la solución de un tipo de problemas
- **Iteración:** El acto de reiterar varias veces determinados pasos.
- **Lema:** Una proposición demostrada y se usa para probar un teorema.
- **Teorema:** Formula que se demuestra a partir de algo formal.
- **Corolario:** Es una proposición que se deduce.
- **Cardinalidad:** Indica el número o cantidad de elementos de un conjunto, sea esta cantidad finita o infinita.
- **Monoide:** Es una estructura algebraica con una operación binaria, que es asociativa y tiene elemento neutro.

2.4 HIPÓTESIS

2.4.1 Hipótesis General

- La aplicación de los homomorfismos entre alfabetos permite la generación de curvas fractales.

CAPITULO III: MARCO METODOLÓGICO

3.1 ENFOQUE Y DISEÑO.

En este trabajo de investigación titulado Curvas fractales generadas a partir de homomorfismos entre alfabetos, con un diseño cualitativo y un enfoque cualitativo: teoría fundamentada, que proporciona una evaluación a los resultados obtenidos con el fin de proceder a los objetivos que se han planteado, en este caso se estudia los homomorfismos entre alfabetos y la cadena de Fibonacci para poder dar con la hipótesis planteada.

3.2 TIPO

Matemática Aplicada

3.3 MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS.

Con la finalidad de alcanzar con los objetivos de este trabajo se revisará libros y revistas relacionados con la generación de curvas fractales. Se establecerá el aspecto teórico relacionado con curvas fractales: definición y propiedades, se hará un análisis de las cadenas definidas sobre un alfabeto luego con el fin de desarrollar un algoritmo que permita mostrar eficientemente todas las gráficas de las curvas fractales. Se estudiará en primer lugar las cadenas de Fibonacci la cual se puede generar a partir de la iteración de un homomorfismo entre alfabetos, estas cadenas son cruciales para el desarrollo de las cadenas de Thue-morse y Sturm, para luego poder analizar la simetría de las curvas obtenidas, variando el ángulo, cuyo atractor es la cadena de Fibonacci.

Se implementará el algoritmo en un software científico y se estudiará su eficiencia para la generación de las curvas fractales en comparación con otras formas de obtener estas curvas. Luego se procederá a realizar cambios en el algoritmo para poder visualizar otro tipo de curvas.

3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS.

Se ha utilizado el instrumento revisión bibliográfica, que hemos citado en el desarrollo del mismo

CAPITULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 RESULTADOS

En esta sección se discute y relaciona las propiedades de las cadenas de Fibonacci con las cadenas de Sturm y la cadena infinita de Thue-Morse. Y próximamente la visualización de las curvas fractales.

4.1.1 Cadena de Thue-Morse

La sucesión de Thue-Morse fue estudiada por primera vez por P. Prouhet en 1851, que la aplicó a la teoría de números. Sin embargo, Prouhet no la mencionó de forma explícita. Quien sí lo hizo fue Axel Thue en 1906, en un estudio de la combinatoria lingüística. En matemáticas, la sucesión de Thue-Morse es una sucesión de dígitos binarios que si se concatenan produce una secuencia con segmentos iniciales alternos. La secuencia se obtiene comenzando con un 0 y añadiendo sucesivamente el complemento Booleano de la secuencia que existe al momento. De esta forma, la secuencia comienza con:

$$0, 01, 0110, 01101001, 0110100110010110 \dots$$

En realidad, dada la aparente simplicidad de su formulación, la secuencia ha sido redescubierta, redefinida y estudiada de forma independiente en muchas ocasiones; y no siempre en el contexto de la investigación matemática.

Definición 4.1. Para generar la cadena de Thue Morse, empezamos con el 0 e iterar el siguiente proceso: Tome la cadena actual y añada su complemento (el 0 se reemplaza por 1 y 1 por 0)

Definición 4.2. Sea $\Sigma = \sigma = \{0,1\}$ se define el Homomorfismo de Thue Morse como:

$\mu(0) = 01$ y $\mu(1) = 10$. Entonces:

$$t = t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n(0) = 01101001100101101001011001101001 \dots$$

Definición 4.3. t_{2n} es un palíndromo

Encontraremos algunos términos de la cadena de Thue Morse:

$$\mu(0) = 01 = t_1$$

$$\mu^2(0) = \mu(01) = \mu(0)\mu(1) = 0110 = t_2$$

$$\mu^3(0) = \mu(0110) = \mu(0)\mu(1)\mu(1)\mu(0) = 01101001 = t_3$$

$$\mu^4(0) = \mu(01101001) = \mu(0)\mu(1)\mu(1)\mu(0)\mu(1)\mu(0)\mu(0)\mu(1)0110100110010110 = t_4$$

Se puede comprobar que t_{2n} es un Palíndromo.

Teorema 4.1. $\mu^n(0) = t_n$, para todo $n \geq 2$.

Demostración.

El argumento es por inducción sobre n

- Para $n = 1$ tenemos $\mu(0) = 01 = t_1$
- Supongamos que se cumple para $n = h$, es decir $\mu^h(0) = t_h$.
- Probaremos que se cumple para $n = h + 1$, como

$$\mu^{h+1}(0) = \mu^h \mu(0) = \mu^h(01) = \mu^h(0) \mu^h(1) = t_{h+1}$$

■

Corolario 4.1. Se cumple que $t_{n+1} = \mu^n(0) \mu^n(1)$.

Demostración.

Por el teorema 4.1 r se tiene que $t_{n+1} = \mu^{n+1}(0)$ en base a ello

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \mu^{n+1}(0) \\ &= \mu^n \mu(0) \\ &= \mu^n(01) \\ &= \mu^n(0) \mu^n(1) \end{aligned}$$

■

4.1.1.1 Interpretación geométrica de la cadena de thue-morse

Como ya hemos visto para convertir una cadena de símbolos en una curva fractal, debemos recorrerla de una manera muy particular. Para esta cadena asignamos al 0 un cuadrado de color blanco y al 1 un cuadrado de color negro.



Figura 4.1. Cadena $\mu^4(0) = 0110100110010110$

Se puede apreciar que podemos crear diferentes curvas fractales utilizando esta cadena que es muy fácil de implementar. Las cadenas de Thue Morse podemos extenderlas para cualquier valor de n que queramos, se puede apreciar que solo las podemos graficar en forma vertical, horizontal y diagonal.

Si nos alejamos para observar la figura **Figura 4.1.** se puede apreciar que se asemeja a una recta.

4.1.1.2 Interpretación fractal de la cadena de thue-morse

Por supuesto, los símbolos 0 y 1 utilizados en la definición de t no tienen nada de especial; es decir, podemos escoger cualquier otro alfabeto de dos letras $\Sigma = \{F, +\}$.

En este caso el símbolo F representa un movimiento hacia adelante y $+$ una rotación en un ángulo $\delta = 120^\circ$

4.1.2 Cadena de Sturm

Las definiciones que se presentan a continuación fueron extraídas de Ramírez y Rubiano (2012)

Definición 4.4. Dada una cadena infinita $\mathbf{w} = w_1 w_2 w_3 \dots$ sobre un alfabeto finito, definimos la función $P_{\mathbf{w}} = \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la manera siguiente: notamos con $L_n(\mathbf{w})$ el conjunto de todas las subcadenas de \mathbf{w} de longitud n , es decir:

$$L_n(\mathbf{w}) = \{w_j w_{j+1} \dots w_{j+n-1} \}; j \geq 1$$

La función de complejidad $P_{\mathbf{w}}(n)$ es definida como la cardinalidad de $L_n(\mathbf{w})$ (el número de diferentes subcadenas de longitud n que tiene \mathbf{w}).

Definición 4.5. Una cadena infinita \mathbf{w} es una cadena de Sturm si $P(\mathbf{w}, n) = n + 1$ para todo entero $n \geq 0$ (la complejidad es mínima con respecto a todas las cadenas que no son a la larga periódicas).

Como $P(\mathbf{w}, 1) = 2$, entonces las palabra de Sturm están construidas sobre alfabetos de solo dos letras. Claramente, $P(\mathbf{w}, 0) = 1$ para toda \mathbf{w} .

Ejemplo 21. La cadena infinita de Fibonacci \mathbf{f} es de Sturm, es decir se tiene que $P(\mathbf{f}, n) = n + 1$ para todo n .

$P(\mathbf{f}, 0) = 1$	$P(\mathbf{f}, 1) = 2$	$P(\mathbf{f}, 2) = 3$	$P(\mathbf{f}, 3) = 4$	$P(\mathbf{f}, 4) = 5$
λ	0,1	00, 01, 10	010, 001, 100, 101	0100, 1001, 0010, 0101, 1010

Cuadro 4. 1. Relación de entre la cadena de Fibonacci y la cadena de Sturm

Fuente: Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica(Ramírez y Rubiano, 2012)

Ejemplo 4.1. La cadena \mathbf{t} de Thue-Morse no es una cadena de Sturm, ya que tiene por ejemplo $P(\mathbf{t}, 2) = 4$.

Una manera aritmética equivalente de definir una cadena de Sturm es la siguiente (existen diferentes maneras equivalentes de definir estas cadenas. Dada la cadena infinita $\mathbf{w} = w_1 w_2 w_3 \dots$, decimos que \mathbf{w} es de Sturm si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ irracional, y tales que:

$$\mathbf{w}_{\alpha}(n) = [\alpha(n + 1) + \beta] + [\alpha(n) + \beta]$$

4.1.3 Algunas cadenas características y curvas fractales

Como un caso particular de las cadenas de Sturm (el caso en que $\beta = 0$), se tienen las cadenas características, las cuales permiten generar nuevas curvas fractales.

Definición 4.6. Sea $\alpha, \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Para $n \geq 1$ definimos

$$w_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor + \lfloor \alpha(n) \rfloor.$$

y

$$w(\alpha) = w_\alpha(1)w_\alpha(2)w_\alpha(3) \cdots$$

Entonces $w(\alpha)$ se llama cadena característica de pendiente α .

Ejemplo 4.2. La cadena f de Fibonacci es la palabra característica de pendiente $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Exactamente,

$f = \frac{1}{\phi^2}$ donde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, es la razón áurea.

$$w\left(\frac{1}{\phi^2}\right) = 010010100100101001010 \cdots = f$$

Utilizando las reglas de dibujo Fibo y diferentes cadenas características podemos generar nuevas curvas fractales, las cuales cambian al momento de dar un valor a α , esto sin duda nos conlleva a obtener espectaculares curvas, las cuales se asemejan a formas de la naturaleza, por lo que hemos creído conveniente asignarles un nombre teniendo en cuenta su parecido con otras.

```
cadenasturm[α_n_Integer]:=Table[Floor[α(i+1)]-Floor[α*i],{i,1,n}];
DenseMove[z_List,δ_pos_List]:=Block[{x,y,τ,moves},{x,y}=pos[[1]];
τ=pos[[2]];moves={{x,y}};Map[{x,y}+={Cos[τ],Sin[τ]};Switch[#,1,τ+=δ,2,τ-
=δ];
AppendTo[moves,{x,y}]]&,z];Return[moves];];Map[2#[[1]]+#[[2]]-1&,
Partition[cadenasturm[0.65,4000],5]];
DenseMove[%,N[100.4Degree],{{0,0},N[30Degree]}];
g1=Graphics[{Hue[RandomReal[]],Line[%],PlotRange->All}]
```

Cuadro 4. 2. Código para generar las cadenas de Sturm y sus respectivas curvas fractales

Fuente: Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica(Ramírez y Rubiano, 2012)

Observación 10.: Las gráficas fractales que se muestran a continuación también pueden ser generadas utilizando el algoritmo hecho en esta investigación (cuadro 2.1.) Pero demanda un poco más de tiempo en la ejecución del algoritmo.

Generando Curvas Fractales en el software científico *Mathematica 9*. Haciendo uso del cuadro 4.2., utilizando el comando `Line`

- Para $\alpha = \sqrt{2} - 0.66$

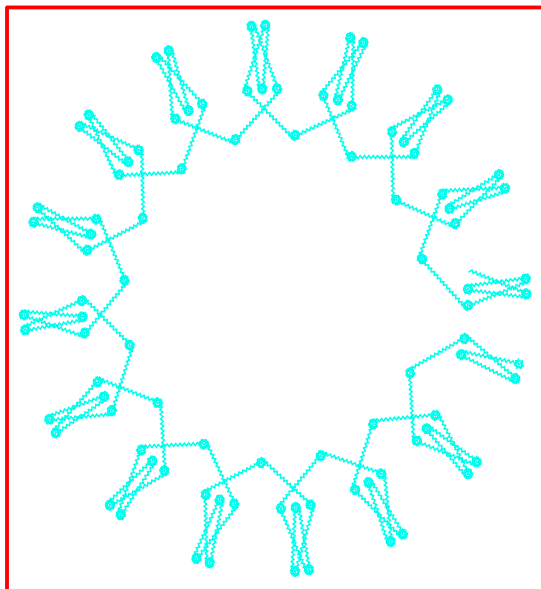


Figura 4. 2. Vincha Sigza, se obtiene cuando $\alpha = \sqrt{2} - 0.66$

- Para $\alpha = \frac{\sqrt{85}+5}{30}$

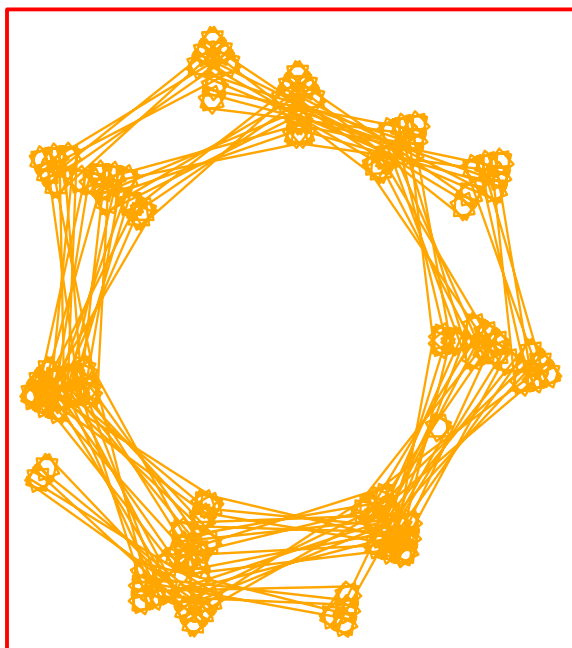


Figura 4. 3. Un colex de cabello.

- Para $\alpha = 0.56$

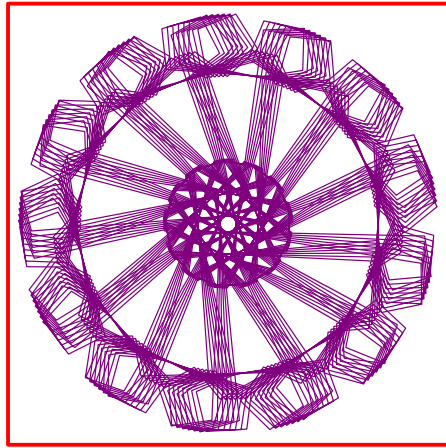


Figura 4. 4. Un Ventilador en movimiento, se obtiene cuando $\alpha = 0.56$

- Para $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \pi + 2$

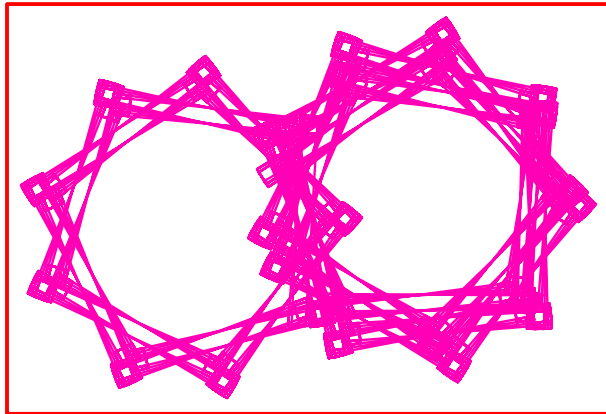


Figura 4. 5. Cuadro porta fotos, se obtiene cuando $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \pi + 2$

- Para $\alpha = 0.84$

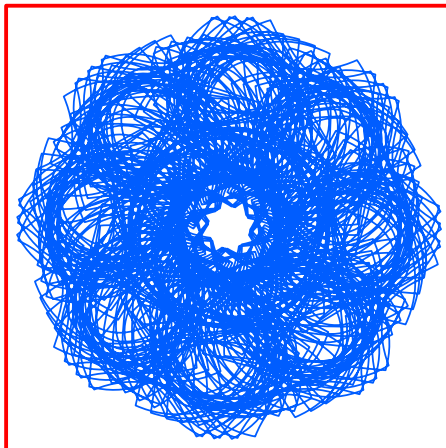


Figura 4. 6. Cuna de niño, se obtiene cuando $\alpha = 0.84$

- Para $\alpha = 0.974$

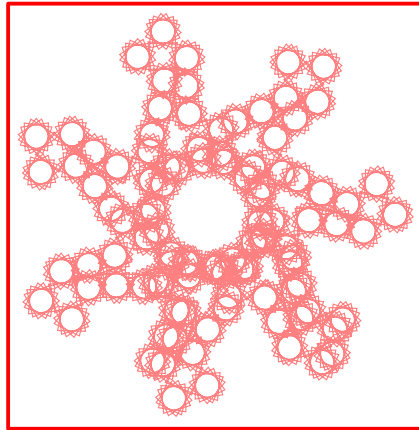


Figura 4. 7. Estrella de Mar, se obtiene cuando $\alpha = 0.974$

Generando Curvas Fractales en el software científico *Mathematica* 9. Haciendo uso del **cuadro 4.2.**, utilizando el comando **POLYGON**

- Para $\alpha = \sqrt{2} - 0.66$

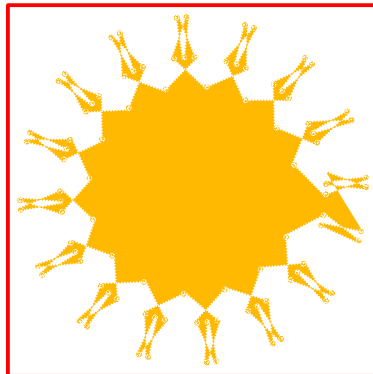


Figura 4. 8. El sol, se obtiene cuando $\alpha = \sqrt{2} - 0.66$

- Para $\alpha = 0.76$

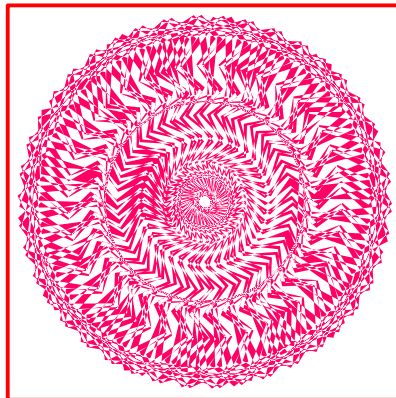


Figura 4. 9. Tapete, se obtiene cuando $\alpha = 0.76$

- Para $\alpha = 0.32$

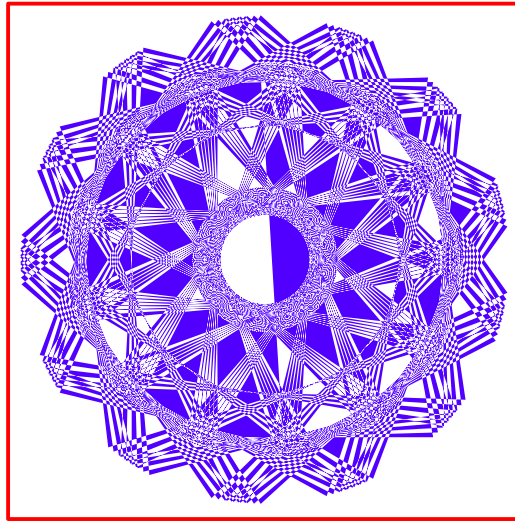


Figura 4. 10. Adorno para el cabello, se obtiene cuando $\alpha = 0.32$

Curvas generadas utilizando Curvas de Bézier en el software científico *Mathematica 9*

La curva de Bézier no interpola entre los puntos del polígono de control. De hecho, en general sólo interpola entre los dos puntos extremos:

$$\alpha(0) = P_0 \text{ y } \alpha(1) = P_n$$

A los puntos encontrados mediante el código del **cuadro 4.2.** le aplicamos las curvas de Bézier

- Para $\alpha = 0.56$

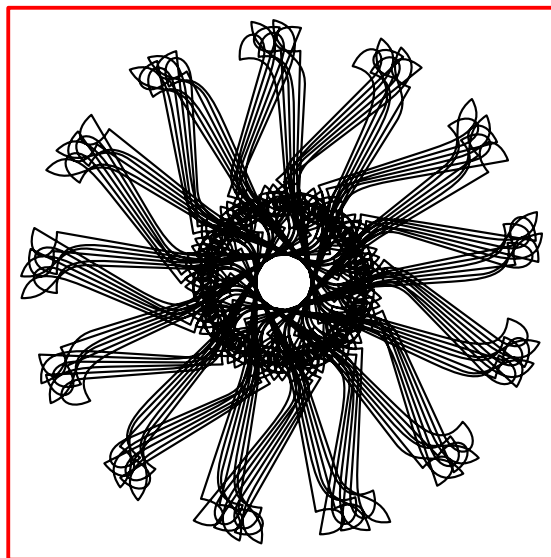


Figura 4. 11. Mariposa de Ventilador, se obtiene cuando $\alpha = 0.56$

- Para $\alpha = 0.76$

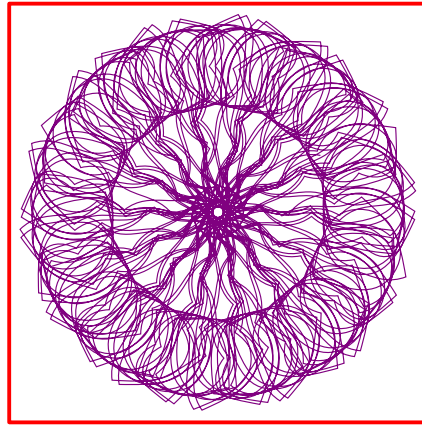


Figura 4. 12. Flor de Alhely, se obtiene cuando $\alpha = 0.76$

- Para $\alpha = \sqrt{2} - 1$

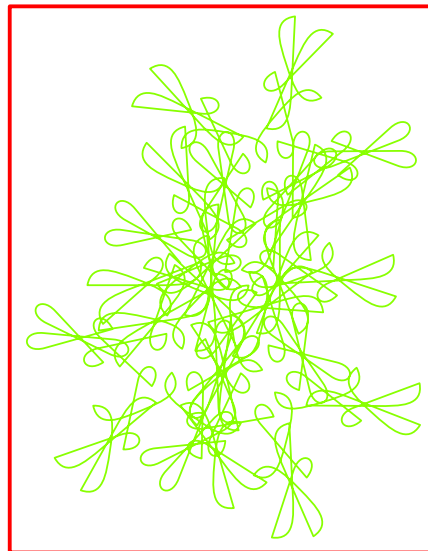


Figura 4. 13. Planta de ají, se obtiene cuando $\alpha = \sqrt{2} - 1$

- Para $\alpha = 0.995$

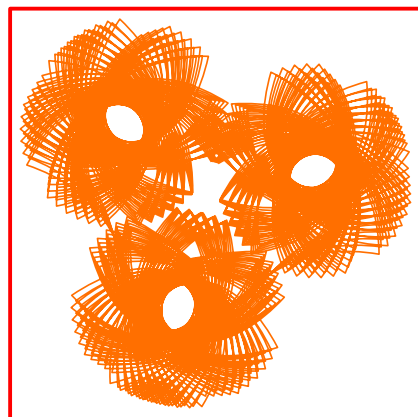


Figura 4. 14. Mascara, se obtiene cuando $\alpha = 0.995$

- Para $\alpha = 0.74$

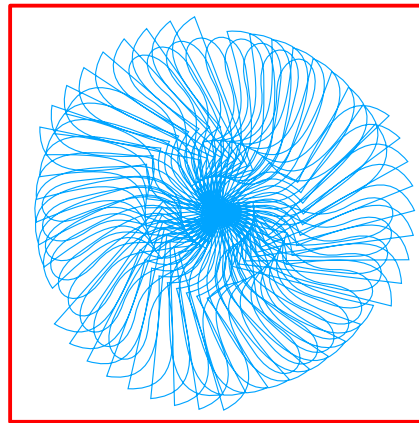


Figura 4. 15. Flor de Maracuyá, se obtiene cuando, $\alpha = 0.74$

- Para $\alpha = 0.31$

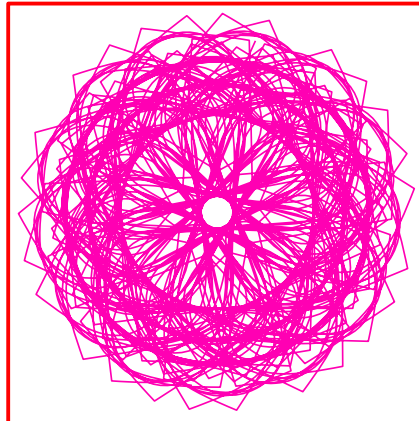


Figura 4. 16. Un Moñete para pelo, se obtiene cuando $\alpha = 0.31$

- Para $\alpha = 0.65$

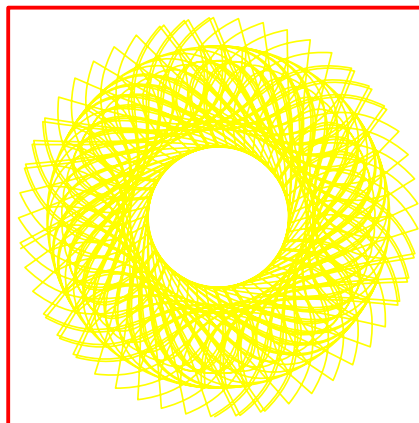


Figura 4. 17. Flor de Girasol, se obtiene cuando $\alpha = 0.65$

- Para $\alpha = \frac{4-1.846}{2}$

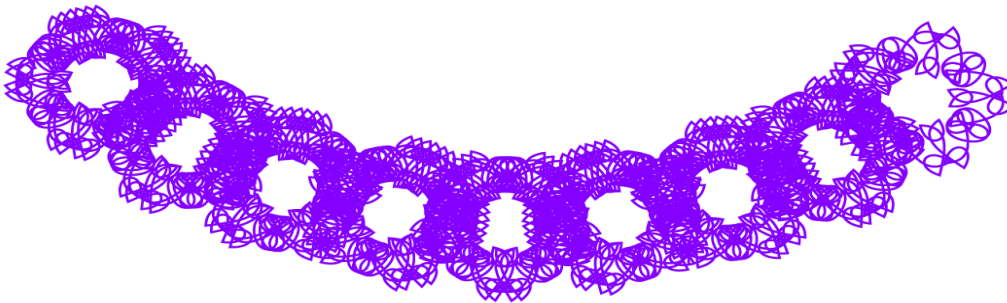


Figura 4. 18. Un Collar de mujer, se obtiene cuando $\alpha = \frac{4-1.846}{2}$

Desde las figuras 4.2 hasta la figura 4.18, son solo algunas de las pocas curvas fractales que se pueden utilizando los homomorfismos entre alfabetos, los cuales nos permiten la generación de las cadenas y por medio de la regla de dibujo Fibo, se generan las curvas fractales que se han mostrado

4.2 DISCUSIÓN

La investigación desarrollada, tiene como propósito generar curvas fractales a partir de homomorfismos entre alfabetos, por lo que:

Utilizando los homomorfismos definidos en un alfabeto binario $\Sigma = \{0,1\}$, se pudo generar curvas fractales que se asemejan a flores propias de nuestro departamento, entre otros objetos fractales. Podemos generar infinitas curvas fractales, solo basta dar un valor $\alpha \in \mathbb{R}$, para poder así definir la cadena de Sturm.

Se verifica que la cadena de Fibonacci es un caso particular de las cadenas de Sturm y que la cadena de Fibonacci cumple con las propiedades de una cadena de Sturm.

Se verifica que utilizando las cadenas de Sturm y $\alpha \in \text{irracionales}$, podemos obtener curvas fractales bellísimas.

Se verifica que las cadenas de Thue Morse no cumplen con las propiedades de una cadena de Sturm.

El algoritmo propuesto (cuadro 2.1.) en esta investigación demanda de un mayor costo computacional, pero es muy fácil de entender debido a que los comandos utilizados son muy comunes.

Al aplicar el comando BezierCurve del software científico Mathematica 9 se puede generar curvas fractales que son más suaves en comparación con las curvas obtenidas al aplicar los comandos Line y Polygon.

CONCLUSIONES

Del desarrollo del trabajo de investigación generación de curvas fractales se puede obtener las siguientes conclusiones:

1. Utilizando los homomorfismos definidos en un alfabeto binario $\Sigma=\{0,1\}$, se pudo generar curvas fractales que se asemejan a flores propias de nuestro departamento, entre otros objetos fractales, podemos generar infinitas curvas fractales.
2. La generación de curvas fractales es posible utilizando la cadena de Fibonacci, la cual está definida en un alfabeto binario de 0 y 1.
3. La cadena de Fibonacci es un caso particular de la cadena de Sturm, por lo tanto la cadena de Fibonacci cumple con las propiedades de una cadena de Sturm. Pero la cadena de Fibonacci, no cumple con las propiedades de una cadena de Thue Morse, entonces podemos afirmar que dicha cadena no se puede definir mediante la cadena característica de Sturm.
4. Utilizando el software científico *Mathematica 9*, se puede implementar mini-programas que demanden un bajo costo computacional, ya que la forma en como hemos definido los mini-programas es muy sencillo, de modo que permitan agilizar los cálculos y poder interactuar de una manera muy fácil en la visualización de las curvas fractales.
5. Al aplicar el comando *BezierCurve* del software científico *Mathematica 9* se puede generar curvas fractales que son más suaves en comparación con las curvas obtenidas al aplicar los comandos *Line* y *Polygon*.

RECOMENDACIONES

1. En este trabajo de investigación se utilizaron los homomorfismos entre alfabetos para la generación de curvas fractales, se recomienda a los futuros investigadores un estudio en la generación de superficies tridimensionales utilizando los homomorfismos entre alfabetos.
2. Dado que en este trabajo se dio énfasis a los alfabetos binarios, se recomienda hacer un estudio para aplicarlo en un alfabeto que no sea binario.
3. En este trabajo se utilizó el software científico *Mathematica 9*, se recomienda tratar de hacer la programación en el Geogebra, por ser un Software libre.
4. Dado que en este trabajo solo se utilizó: Line, BezierCurve y Polygon comando del software científico *Mathematica 9*, se recomienda hacer una investigación utilizando las curvas B-Spline.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bresia, S. (2009). Primeras reflexiones de los fractales, la teoría del caos y su aplicación en las aulas. *Red Visual*(9 y 10), 1-6. Obtenido de <http://www.redvisual.net/>
- Correa, S., & Raymundo. (2014). *Sistema de funciones iteradas en la geometría fractal y su aplicación en el modelamiento de imágenes naturales con programación determinista en Mathematica*. Universidad Nacional de Piura.
- Correa, S., & Vidarte, A. (2002). *Construcción de superficies Fractales y su Aplicación en el Diseño de Objetos Naturales Irregulares*. Universidad Nacional de Piura, Perú.
- Paluszny, M., Prautzsch, H., & Boehm, W. (2002). *Métodos de Bézier y B-Splines*. Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- Perrera, J. G., Perrera, J. H., & Spinadel, M. W. (s.f.). *Fractales. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura*.
- Perrera, J. G., Perrera, J. H., & Vera W, D. (2007). *Geometría Fractal* (3 ed.). Editorial Nueva Librería.
- Pogorélov, A. V. (1997). *Geometría Diferencial*. (C. Vega, Trad.) MIR MOSCÚ.
- Ramírez, J. L., & Rubiano, G. N. (2012). Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes con Mathematica. *Integración*, 30(2), 129-150.
- Rodriguez, R. (1995). *La teoría de fractales: Aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia*. Universidad Autónoma de Nuevo Leon.CD Universitaria.

ANEXOS

Anexo 1 Programa para generar curvas fractales en el software científico *Mathematica 9*, utilizando el comando **Polygon**

```

cadenasturm[α_,n_Integer]:=Table[Floor[α(i+1)]-Floor[α*i],{i,1,n}];
DenseMove[z_List,δ_,pos_List]:=Block[{x,y,τ,moves},{x,y}=pos[[1]];
τ=pos[[2]];moves={{x,y}};Map[{x,y}+={Cos[τ],Sin[τ]};Switch[#,1,τ+=δ,2,τ-
=δ];
AppendTo[moves,{x,y}]]&z];Return[moves];];Map[2#[[1]]+#[[2]]-1&,
Partition[cadenasturm[0.65,4000],5]];
DenseMove[%,N[100.4Degree],{{0,0},N[30Degree]}];
g1=Graphics[{Hue[RandomReal[]],Polygon [%],PlotRange→All}]

```

Cuadro 1. Programación usando el comando **Polygon**

Anexo 2. Programa para generar curvas fractales en el software científico *Mathematica 9*, utilizando el comando **BezierCurve**

```

cadenasturm[α_,n_Integer]:=Table[Floor[α(i+1)]-Floor[α*i],{i,1,n}];
DenseMove[z_List,δ_,pos_List]:=Block[{x,y,τ,moves},{x,y}=pos[[1]];
τ=pos[[2]];moves={{x,y}};Map[{x,y}+={Cos[τ],Sin[τ]};Switch[#,1,τ+=δ,2,τ-
=δ];
AppendTo[moves,{x,y}]]&z];Return[moves];];Map[2#[[1]]+#[[2]]-1&,
Partition[cadenasturm[0.65,4000],5]];
DenseMove[%,N[100.4Degree],{{0,0},N[30Degree]}];
g1=Graphics[{Hue[RandomReal[]],BezierCurve [%],PlotRange→All}]

```

Cuadro 2. Programación usando el comando **BezierCurve**

Anexo 3. Mini – programa para generar exclusivamente cadenas de Fibonacci

```
fibo[n_Integer]:=Module[{out={},f},
  f[0]=1;f[1]=0;
  For[i=2,i≤n,i++,
    out=f[i];
    f[i]=Flatten[Flatten[
      {f[i-1],f[i-2]}]]; ];out]
```

Cuadro 3. Programación para generar la cadena de Fibonacci.

Para $n = 5$, obtenemos las siguientes cadenas:

- [illegible]

En este algoritmo se utilizó comandos básicos del software científico *Mathematica 9*.

Anexo 4. Mini – programa para generar las 5 curvas características de Fibonacci

```
CadenaFibonacci[n_]:=Nest[StringReplace[#,{"0"->"01","1"->"0"}]&,"1",n]
```

```
CambiodeCadenaFibonacci[n_]:=StringReplace[CadenaFibonacci[n],{"10"
->"FF+", "01"->"F-F", "00"->"F-F+"}]
```

```

GenerarCadenaFibonacci[z_String, \[Delta]_, \[Alpha]_] := Module[{x, y,
\[Theta], trasladar}, {x, y} = {0, 0}; \[Theta] = \[Alpha]; trasladar = {{x,
y}}; (Switch[#, "+", \[Theta] += \[Delta];, "-", \[Theta] -= \[Delta];,
"F", {x, y} += {Cos[\[Theta]], Sin[\[Theta]]}]; AppendTo[trasladar, {x, y}
]); &/@Characters[z]; Return[trasladar];]

```

```
gra[n_]:=Block[{},GenerarCadenaFibonacci[CambiodeCadenaFibonacci[n  
    ],90Degree,90Degree];Graphics[{Black, Line[%]},PlotRange -> All]]
```

```

ColorFibonacci[n_]:=Module[{c},c=GenerarCadenaFibonacci[CambiodeCadenaFibonacci[n],90Degree,90Degree];f3=StringLength[CadenaFibonacci[n-3+1]];f6=StringLength[CadenaFibonacci[n-6+1]];Graphics[{Blue,Line[Take[c,{1,f3}]],Yellow,Line[Take[c,{f3,2f3}]],Black,Line[Take[c,{2f3,2f3+f6}]],Green,Line[Take[c,{2f3+f6,3f3+f6}]],Purple,Line[Take[c,{3f3+f6,4f3+f6}]]},ImageSize->200]]

```

Para $n=20$, generamos las 5 curvas características de Fibonacci

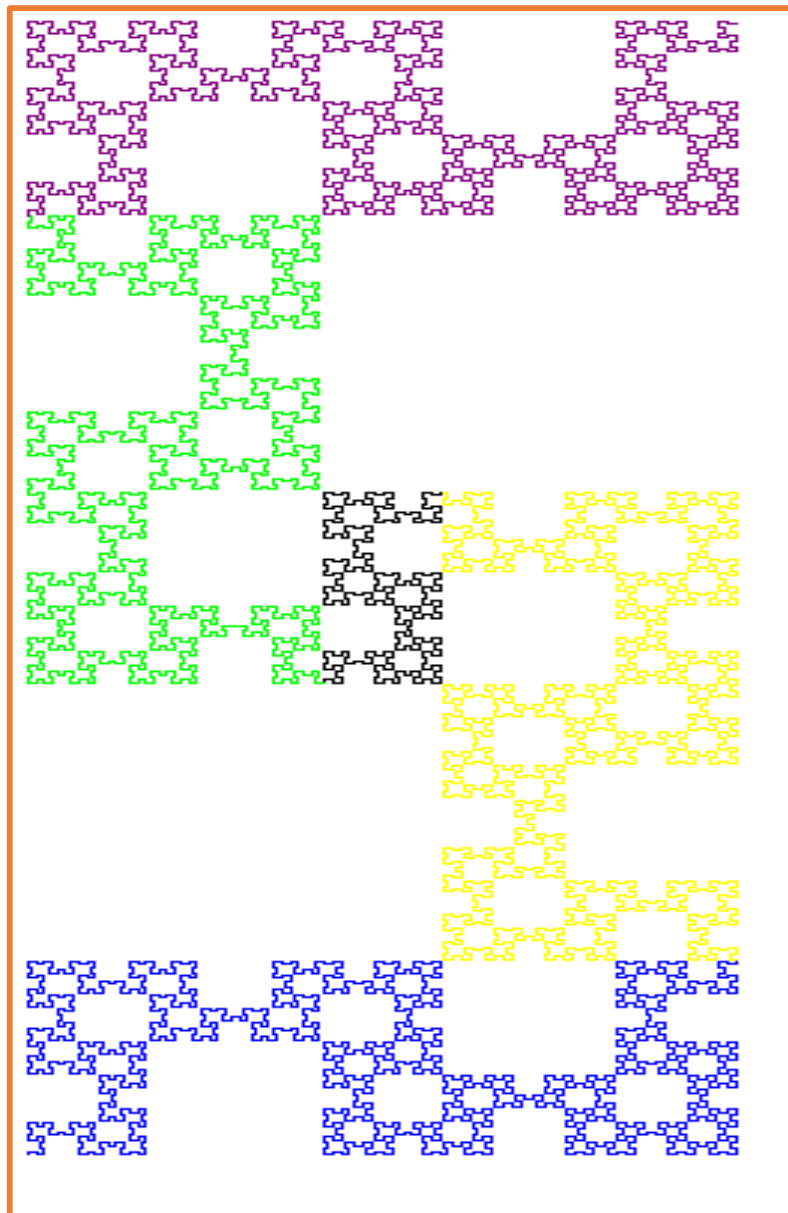


Figura curvas características de Fibonacci

Anexo 5. Matriz general de consistencia

Título: Curvas fractales generadas a partir de homomorfismos entre alfabetos. Nombre del Tesista: Br. Andy Raul Peña Vilchez			Piura – Perú 2019
Problemas	Hipótesis	Objetivos	Metodología
General ¿Es posible aplicar los homomorfismos entre alfabetos para la generación de curvas Fractales?	General La aplicación de los homomorfismos entre alfabetos permite la generación de curvas fractales.	General Demostrar que los homomorfismos entre alfabetos pueden ser usados para la generación de curvas fractales. Específicos <ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar la cadena de Fibonacci para la generación de curvas fractales. 2. Relacionar las propiedades de las cadenas de Fibonacci con las cadenas de Sturm y la cadena infinita de Thue-Morse. 3. Utilizar el software científico Mathematica 9 para generar las cadenas de Fibonacci y visualizar las gráficas asociadas a dicha cadena. 	Enfoque: Cualitativo Diseño: No experimental Nivel: descriptivo Tipo: descriptivo Métodos: Investigación descriptiva Técnicas e instrumentos: Revisión Bibliográfica Procedimiento: Esta información se basa en la recolección de revistas de investigación, libros escritos, tesis desarrolladas y uso del <i>Mathematica 9</i> . Llegando a la demostración de nuestra hipótesis planteada.